Topologie dans les espaces vectoriels normés, cours de premier cycle universitaire

F.Gaudon

29 juillet 2005

Table des matières

Dans la suite, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1 Espaces vectoriels normés

1.1 Distance, norme

Définition :

Une application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ est une *distance* si :
- $\forall x, y \in E \; d(x;y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $\forall x, y \in E \; d(x;y) = d(y;x)$
- $\forall x, y, z \in E \; d(x;z) \leq d(x;y) + d(y;z)$ (*inégalité triangulaire*)

Définition :

Une application $\| \; \| : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ est une *norme* si :
- $\forall x \in E \; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\forall \lambda in \mathbb{K} \; \forall x \in E \;\; \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
- $\forall (x;y) \in E^2 \;\; \|x+y\| \leq \|x\| + \|y|$ (*inégalité triangulaire*)

Proposition :

$$\forall x \in E, \forall y \in E, |\|x\| - \|y\|| \leq \|x+y\|$$

Exemples :
Soit $\{e_1; e_2; \ldots; e_d\}$ la base canonique de $\mathbb{R}$, sur $\mathbb{R}^{\ltimes}$ on définit pour tout $x \in \mathbb{R}^{\ltimes}$ avec $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_de_d$ les normes suivantes :
- $N_2(x) = \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_d^2}$ (norme euclidienne)
  Cette norme dérive du produit scalaire défini par
  $< x|y >= x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_dy_d$
- $N_1(x) = \|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_d|$ (norme du chauffeur de taxi new yorkais car elle correspond pour $n = 2$ à la distance parcourue par un taxi dans une ville où les rues sont à angles droits)

- $N_\infty(x) = \|x\|_\infty = max\{|x_i|/1 \leq i \leq d\}$ (norme uniforme ou norme du joueur d'échec car elle correspond à la distance séparant deux cases pour un roi du jeu d'échec)
- pour $p \in [1; +\infty[$, $N_p(x) = \|x\|_p = \sqrt[1/p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_d|^p}$ qui généralise les deux premières normes citées.
  L'utilisation de l'indice infini pour la norme uniforme vient du fait que celle-ci s'obtient en prenant la limite de norme p en $+\infty$.

Définition :

Un espace vectoriel E sur lequel est défini une norme est appelé *espace vectoriel normé*.
On note alors $(E; \|\ \|)$.

Définition :

On appelle distance induite par une norme sur un espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$ la distance d définie par $\forall x, y \in E\ d(x; y) = \|x - y\|$.

1.2 Équivalence de normes

Définition :

Deux normes $\|\ \|$ et N sur E sont dites *équivalentes* s'il existe $(m; M) \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in E, m\|x\| \leq N(x) \leq M\|x\|$

Théorème :

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

preuve (peut être omise en première lecture) :
Soit E un espace vectoriel de dimension finie d et $\|\ \|$ une norme sur E. Il suffit de démontrer qu'elle est équivalente à la norme $\|\ \|_1$.
Soit $\{e_1; e_2; \ldots; e_n\}$ une base de E.
$\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i$ on a :
$\|x\| = \| \sum_{i=1} d x_i e_i\| \leq \sum_{i=1}^{d} |x_i| \|e_i\| \leq (\sum_{i=1}^{d} |x_i|) max\{\|e_i\|/i \in \{1; \ldots; d\}\}$.

On pose $M = max\{\|e_i\|/i \in \{1; \ldots; d\}\}$. D'où $\|x\| \leq M\|x\|_1$.
D'autre part $\| \|_1$ est continue sur sur la sphère unité S_1 pour la norme $\| \|_1$ donc $\exists m \in \mathbb{R}_+^* / m = inf\{\|x\|_1 / x \in S_1\}$.
Pour $x \in E$ on a alors $\frac{x}{\|x\|_1} \in S_1$ donc $\|\frac{x}{\|x\|_1}\| \geq m$ c'est à dire $\frac{\|x\|}{\|x\|_1} \geq m$ et $\|x\| \geq m\|x\|_1$.

Remarque :

- Ce résultat est faux si E n'est pas supposé de dimension finie : par exmple, dans $\mathcal{C}([a;b];\mathbb{K})$, les normes $\|\|\|_1$ et $\|\|\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.
- Le théorème est faux si le corps de base n'est pas $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
  Par exemple, considérons dans $\mathbb{Q}^2$ considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ les deux normes $N_1(r;r') = |r| + |r'|$ et $N(r;r') = |r - r'\sqrt{2}|$.
  Soit $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites d'entiers naturels non nuls telles que la suite (a_n/b_n) converge vers $\sqrt{2}$.
  On a $\frac{N_1(a_n;b_n)}{N(a_n;b_n)} = \frac{|a_n/b_n|+1}{\frac{a_n}{b_n}} - \sqrt{2}|$ qui tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini, ce qui montre qu'il n'existe pas de constante k telle que $N_1 \leq kN_2$.

2 Ouverts et fermés d'un espace vectoriel normé

Dans ce qui suit, E est un espace vectoriel normé $(E; \| \|)$.

2.1 Boules et sphères

Définition :

Soient $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$. On appelle :

- *boule ouverte* de centre a et de rayon r l'ensemble :

$$B(a;r) = \{x \in E \,/\, \|x - r\| > r\}$$

- *boule fermée* de centre a et de rayon r l'ensemble :

$$B(a;r) = \{x \in E \ |x - r\| \leq r\}$$

- *sphère* de centre a et de rayon r l'ensemble :

$$S(a;r) = \{x \in E \ \|x-\| = r\}$$

Définition :

- Une partie A est dite *bornée* si elle est incluse dans une boule ouverte, c'est à dire si $\exists a \in E\ \exists r > 0\ A \subset B(a;r)$.
- Si A est une partie *bornée*, $\sup \|x-y\|\ /\ (x;) \in A$ est appelé le *diamètre* de A.

2.2 Ouverts, fermés

Définition :

- Une partie A est dite *ouverte* si chacun de ses points est le centre d'une boule ouverte contenu dans A, c'est à dire si

$$\forall x \in A\ \exists r > 0\ \ B(x;r) \subset A$$

  On dit aussi que A est un *ouvert* de E.
- Une partie F est dite *fermée* si son complémentaire dans E est une partie ouverte de E. On dit aussi que F est un *fermé* de E.

Exemples :
- Une boule ouverte est un ouvert.
- $\emptyset$ et E sont à la fois fermés et ouverts.
- Une boule fermée est un fermé.

Preuve :
En effet, soit $B(a;r)$ une boule ouverte de centre a et de rayon r. Pour tout point x de $B(a;r)$, on a $\|x-a\| < r$. Il existe donc $\epsilon > 0$ tel que $\|x-a\| + \epsilon < r$(prendre $\epsilon = \frac{r-\|x-a\|}{2}$). Par suite, pour tout y appartenant à $B(x;\epsilon)$, on a

$$\|a-y\| \leq \|a-x\| + \|x-y\| \leq \|x-a\| + \epsilon < r$$

donc $y \in B(a;r)$ d'où $B(x;\epsilon) \in B(a;r)$. Ceci justifie que pour tout point de $B(a;r)$, il existe une boule ouverte centrée en ce point et incluse dans $B(a;r)$ donc $B(a;r)$ est un ouvert.

Proposition :

- Pour tout ensemble I et toute famille $(O_i)_{i\in I}$ d'ouverts de E, $\cup_{i\in I}O_i$ est un ouvert.
- Pour toute famille finie $(O_i)_{i\in\{1;\dots;n\}}$ d'ouverts, $\cap_{i=1}^n O_i$ est un ouvert.
- Pour toute famille finie $(F_i)_{i\in\{1;\dots;n\}}$ de fermés, $\cup_{i=1}^n F_i$ est un fermé.
- Pour tout ensemble I et toute famille $(F_i)_{i\in I}$ de fermés de E, $\cap_{i\in I}F_i$ est un fermé.

Preuve :

- $\forall x \in \cup_{i\in I}O_i,\ \exists i \in I,\ x \in O_i$. Puisque O_i est un ouvert, il existe une boule ouverte de centre x incluse dans O_i donc dans $\cup_{i\in I}O_i$, ce qui justifie que pour tout point de la réunion des O_i pour $i \in I$, il existe une boule ouverte centrée en ce point et incluse dans cette réunion. Par conséquent $\cup_{i\in I}O_i$ est un ouvert.
- Pour tout élément x de l'intersection des O_i pour $i \in \{1;\dots;n\}$, pour tout $i \in \{1;\dots;n\}$, O_i étant un ouvert, il existe une boule ouverte de centre x et rayon $r_i > 0$ incluse dans O_i. En désignant par r le minimum des r_i pour $i \in \{1;\dots;n\}$, la boule ouverte de centre x et de rayon r est donc incluse dans $\bigcap_{i\in\{1;\dots;n\}}$ qui est donc un ouvert.
- $\complement \cup_{i\in\{1;\dots;n\}} F_i = \cap_{i\in\{1;\dots;n\}}\complement F_i$. Or les F_i étant fermés, leurs complémentaires sont fermés et d'après les propriétés précédentes l'intersection des complémentaires est encore un ouvert, ce qui signifie que la réunion des F_i est fermé.
- De la même manière que précédemment, on montre que le complémentaire des F_i pour $i \in I$ est un ouvert.

2.3 Voisinages

Définition :

Soit $a \in E$. On dit qu'une partie V de E est un *voisinage* de a dans E s'il existe un ouvert O contenant a et inclus dans V ou, de manière équivalente, si

$$\exists r > 0\ B(a;r) \subset V$$

On notera $\mathcal{V}_E(a)$ l'ensemble des voisinages de a.

Preuve :

Si V est un voisinage de a alors il existe un ouvert O contenant a et inclus dans V. Or O étant ouvert et contenant a, il existe par définition d'un ouvert, une

boule ouverte de centre a contenue dans O. En appelant r son rayon on a la première implication.
Réciproquement, s'il existe une boule ouverte de centre a et de rayon $r > 0$ contenue dans V, comme une boule ouverte est un ouvert, V contient bien un ouvert contenant a.

Propriétés :

Soit $a \in E$.
- Toute partie de E contenant un voisinage de a est un voisinage de a.
- Toute intersection finie de voisinages de a est encore un voisinage de a.

Preuve :
- Soit W une partie de E contenant un voisinage V de a. V étant un voisinage de a, il contient une boule ouverte de centre a et de rayon r qui est aussi contenue dans W ce qui assure que W est un voisinage de a.
- Une intersection finie de voisinages de a contient une intersection finie de boules ouvertes centrées en a. En prenant le rayon minimum parmi le nombres fini de rayons, on obtient une boule ouverte centrée en a et incluse dans l'intersection des voisinages ce qui assure qu'une intersection finie de voisinages de a est encore un voisinage de a.

Proposition :

Une partie A de E est un ouvert si et seulement si A est un voisinage de chacun de ses points.

Preuve :
Immédiat.

Définition :

Soient A une partie de E et $x \in E$.
- x est un *point d'accumulation* de A si tout voisinage de x dans E a son intersection avec A non réduite à x, c'est à dire

$$\forall V \in \mathcal{V}_E(x),\ V \cap A - x \neq \emptyset$$

- x est un *point isolé* de A s'il existe un ouvert O de E contenant x et dont l'intersection avec A se réduit à x, c'est à dire $O \cap A = \{x\}$.

Proposition :

Soient A une partie de E et $x \in A$. Il y équivalence entre :
- x est un point d'accumulation de A dans E.
- Il existe une suite d'éléments de $A - \{x\}$ convergeant vers x.
- Tout voisinage de x contient une infinité de points de A.

2.4 Ouverts et fermés relatifs

Définition :

Soit A une partie de E.
- Une partie O de A est dite *ouverte dans A* s'il existe un ouvert U de E tel que $O = U \cap A$.
- Une partie F de A est dite *fermée dans A* s'il existe un fermé W de E tel que $F = W \cap A$.

3 Ouverts et fermés fondamentaux

3.1 Intérieur, adhérence

Définition :

Soient A une partie de E et a un point de A.
- On dit que a est un *point intérieur* à A si il existe un voisinage de a contenu dans A.
- On appelle *intérieur* de A et on note $\overset{\circ}{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A.
- On dit que a est un *point adhérent* à A si tout voisinage de a dans E est d'intersection non vide avec A.
- On appelle *adhérence* de A et on note $\bar{A}$ l'ensemble des points adhérents à A.

Proposition :

- L'intérieur d'une partie A est :
  - la réunion des ouverts contenus dans A ;
  - le plus grand ouvert contenu dans A.
- L'adhérence d'une partie A est :
  - l'intersection des fermés contenant A ;
  - le plus petit fermé contenant A.

Proposition :

Soients A, B deux parties de E. On a :

- A est un ouvert si et seulement si $\overset{\circ}{A} = A$.
- A est un fermé si et seulement si $\bar{A} = A$.
- $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$
- $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$
- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$
- $\overset{\circ\circ}{A} = \overset{\circ}{A}$
- $A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$
- $\overset{\circ}{\overline{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$
- $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overline{A \cup B}}$

Définition :

On appelle *frontière* d'une partie A le complémentaire de l'intérieur de A dans l'adhérence de A, c'est à dire :

$$Fr(A) = \bar{A} - \overset{\circ}{A}$$

3.2 Parties denses

Définition :

Une partie A est dite *dense* dans E si son adhérence est égale à l'espace E, c'est à dire si $\bar{A} = E$.

Exemple :

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

4 Indépendance par rapport aux normes

Remarque :
Les boules, les ouverts, les fermés, les points adhérents ou intérieurs à une partie sont définis à partir d'une norme pour un espace vectoriel normé.
Or, un espace vectoriel normé peut être muni de plusieurs normes.
Il se pose alors la question de savoir si le fait de changer de norme changera la nature des objets ainsi définis.
On a vu que toutes les normes sont équivalentes dans un espace vectoriel normé de dimension finie, cela signifie que la *notion d'ouverts, de fermés, de points adhérents, de points intérieurs, mais aussi de limite de suites dépend uniquement de l'espace et pas de la norme choisie*.
Cela permet en particulier de choisir la norme la mieux adaptée à la situation étudiée.