Exercices sur les suites de nombres réels, première année de premier cycle universitaire

F.Gaudon

19 août 2005

1 Énoncés

Exercice 1:
Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites vérifiant :

$$\begin{cases} 0 \leq u_n \leq 1 \\ 0 \leq v_n \leq 1 \\ \lim_{n\to\infty} u_n v_n = 1 \end{cases}$$

Que peut-on en dire ?

Exercice 2:
Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites de réels strictement positifs vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Montrer que si $(b_n)_n$ est convergente vers 0 alors $(a_n)_n$ est aussi convergente vers 0.

Exercice 3:
Soient $(a;b) \in (R_+^*)^2$ et $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ les suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \end{cases}$$

1. Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont convergente vers une même limite appelée *moyenne arithmético-géométrique de a et b.*
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{(v_n - u_n)^2}{8\sqrt{ab}}$$
3. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que :
$$0 \leq \frac{u_{n_0} - v_{n_0}}{8\sqrt{ab}} < 1$$
et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$n > n_0 \Rightarrow 0 \leq\ u_n - v_n \leq 8\sqrt{ab}\left(\frac{v_{n_0} - u_{n_0}}{8\sqrt{ab}}\right)^{2^{n-n_0}}$$

Exercice 4:
Soient $x \in \mathbb{R}^*$ et une suite $(u_n)_n$ de rationnels convergeante vers x. On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{p_n}{q_n}$ avec $p_n \in \mathbb{Z}$ et $q_n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer que si $(p_n)_n$ ou $(q_n)_n$ est une suite bornée, alors l'autre l'est aussi et $x \in \mathbb{Q}$
2. En déduire que si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ alors $\lim_{n\to\infty} |p_n| = +\infty$ et $\lim_{n\to\infty} |q_n| = +\infty$.

Exercice 5:
Soit $(u_n)_n$ une suite dans $\mathbb{R}$. On définit la suite réelle $(v_n)_n$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n}{n}$$

1. Montrer que si $(u_n)_n$ converge vers un réel l, alors $(v_n)_n$ converge aussi vers l (théorème de Cesaro).
2. La réciproque de la propriété précédente est-elle vraie ?
3. Application :

   on suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$. Montrer que si $(\frac{u_{n+1}}{u_n})_n$ converge vers un réel l, alors $(\sqrt[n]{u_n})_n$ converge aussi vers l.

2 Indications

Exercice 1 :

Traduire la limite en termes d'epsilon et utiliser l'inégalité $\forall n \in \mathbb{N} u_n v_n \leq u_n$.

Exercice 2 :

Remarquer que $\frac{an}{a_0} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \dots \frac{a_1}{a_0}$.

Exercice 3 :

Montrer que les deux suites sont adjacentes.