# Suites de nombres réels, première année de premier cycle universitaire

F.Gaudon

10 août 2005

## Table des matières

Dans toute la suite, on se donne une suite $(u_n)_n$ de nombres réels.

# 1 Définitions

**Définition :**

- Une suite $(u_n)_n$ est *majorée* s'il existe un nombre réel $M$ tel que pour tout entier $n$ $u_n \leq M$.
- Une suite $(u_n)_n$ est *minorée* s'il existe un nombre réel $m$ tel que pour tout entier $n$ $u_n \geq m$.
- Une suite $(u_n)_n$ est *bornée* si elle est *majorée* et *minorée*, c'est à dire si $\exists (m; M) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n \leq M$.

**Définition :**

- Une suite $(u_n)_n$ est *croissante* si pour tout entier $n$, $u_n \leq u_{n+1}$.
- Une suite $(u_n)_n$ est *décroissante* si pour tout entier $n$, $u_{n+1} \leq u_n$.
- Une suite $(u_n)_n$ est *stationnaire* si il existe un entier $N$ tel que pour tout entier $n \geq N,\ u_n = u_N$.
- Une suite $(u_n)_n$ est *monotone* si elle est *croissante* ou *décroissante*.

**définition :**

Une propriété $P(n)$ est vraie *à partir d'un certain rang* s'il existe un entier $N$ tel que pour tout entier $n \geq N$ $P(n)$ est vraie.

**Définition :**

- On dit que $(u_n)_n$ *tend vers* (ou *converge* ou *a pour limite*) $l \in \mathbb{R}$ ssi

$$\forall \epsilon, \exists N, \forall n \geq N, |u_n - l| < \epsilon$$

- Une suite pour laquelle il existe un réel $l$ tel que la suite converge vers $l$ est dite *convergente*. Une suite qui ne converge pas est dite *divergente*.
- On dit que $(u_n)_n$ *tend vers* (ou *diverge vers a pour limite*) $+\infty$ (resp. $-\infty$) ssi

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq M$$

$$(resp. \forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall \geq N, u_n \leq M)$$

**Proposition :**

Si $(u_n)_n$ a une limite $l$ alors elle est unique . On la note $\lim_{n \to +\infty}$ ou $\lim_n$.

**preuve :**
Nous ne traitons que le cas où $(u_n)_n$ possède deux limites finies distinctes $l$ et $l'$.
Il existe alors $\epsilon > 0$ tel que $]l - \epsilon; l + \epsilon[\bigcap]l' - \epsilon; l' + \epsilon[= \emptyset$.
Comme $(u_n)_n$ tend vers $l$, $\exists \in \mathbb{N}/\forall n \geq N, u_n \in ]l - \epsilon; l + \epsilon[$;.
De même, $\exists N \in \mathbb{N}/\forall n \geq N', u_n \in ]l' - \epsilon; l' + \epsilon[$.
Par conséquent, $\forall n \geq max(N, N'), u_n \in ]l - \epsilon; l + \epsilon[\bigcap]l' - \epsilon; l' + \epsilon[$ : contradiction.

**Proposition :**

Toute suite réelle $(u_n)_n$ convergente vers un réel $l$ est bornée.

**Preuve :**
Puisque $(u_n)_n$ est convergente vers $l$, pour $\epsilon = 1$, il existe un entier $n$ tel que pour tout entier $n$ supérieur ou égal à $N$ on a $|u_n - l| < 1$ donc $-1 < u_n - l < 1$ ou encore $l - 1 < u_n < l + 1$. Par conséquent, on a pour tout entier $n$,
$u_n \leq \max\{u_0; u_1; \ldots; u_{N-1}; l + 1\}$ et $u_n \geq \max\{u_0; u_1; u_2; \ldots; u_{N-1}; l - 1\}$.

## 2 Opérations sur les suites convergentes ou divergentes

**Proposition :**

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles et $l, l' \in \mathbb{R}$. On suppose que $(u_n)_n$ converge vers $l$.

- Si $(v_n)_n$ converge vers $l'$, alors $(u_n + v_n)_n$ converge vers $l'$.
- alors $(\lambda u_n)_n$ converge vers $\lambda l$.
- Si $(v_n)_n$ est bornée, alors $(u_n v_n)_n$ converge vers $0$.
- Si $(v_n)_n$ converge vers $l'$, alors $(u_n v_n)_n$ converge vers $ll'$.
- Si $l' \neq 0$ et $(v_n)_n$ converge vers $l'$, alors $(\frac{u_n}{v_n})_n$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers $\frac{l}{l'}$.

**Preuve :**

- Pour tout $\epsilon$ strictement positif, $(u_n)_n$ étant convergente,
$\exists N_1 > 0,\ \forall n \geq N_1,\ |u_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$. De même, $(v_n)_n$ étant convergente,
$\exists N_2 > 0,\ \forall n \geq N_2,\ |v_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$.
Par suite, $\forall n \geq \max N_1; N_2,\ |u_n + v_n - (l + l')| < |u_n - l| + |v_n - l'| < \epsilon$ ce qui montre que la suite $(u_n + v_n)_n$ converge vers $l + l'$.

- Même méthode que précédemment.

- $(v_n)_n$ étant bornée, il existe $M > 0$ tel que pour tout entier $n$, on a $v_n$ inférieur ou égal à $M$.
Comme $(u_n)_n$ converge vers 0, pour tout $\epsilon$ strictement positif, il existe un entier $N$ tel que pour tout entier $n$ supérieur à $N$ on a $|u_n - 0| < \frac{\epsilon}{M}$.
D'où $|u_n v_n| < \frac{\epsilon}{M} M$ ce qui montre que $(u_n v_n)_n$ est convergente vers 0.

- Soit $\epsilon > 0$. $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ étant convergentes, elles sont respectivement bornées par deux réels $M$ et $M'$. On a pour tout entier $n$,
$|u_n v_n - ll'| = |u_n v_n - u_n l' + l' u_n - ll'| < |u_n||(v_n - l')| + |l'||u_n - l|$ puis $M|v_n - l'| + |l'||un\_l|$. On utilise ensuite la définition de la convergence des deux suites pour majorer $|u_n - l|$ par $\frac{\epsilon}{2|l'|}$ et $|v_n - l'|$ par $\frac{\epsilon}{2M}$ .

- $l' \neq 0$ implique que $|l'| > 0$.
Comme $(v_n)_n$ converge vers $l'$, pour $\epsilon = \frac{|l'|}{2}$, il existe un entier $N$ tel que pour tout entier $n$ supérieur ou égal à $N$ on a $|v_n - l'| < \frac{|l'|}{2}$. Avec $||v_n| - |l'|| < |v_n - l'|$ on obtient donc $||v_n| - |l'|| < \frac{|l'|}{2}$ c'est à dire $0 < |l'| - \frac{|l'|}{2} < ||v_n|$ ce qui assure que pour tout $n$ supérieur ou égal à $N$, la suite $(v_n)_n$ est bien définie.
Pour montrer la convergence, on utilise le fait que pour tout $n$ entier supérieur ou égal à $N$, $|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{l'}| = |\frac{l'}{v_n l'} - \frac{v_n}{v_n l'}|$. $(v_n)_n$ est minorée car convergente par un nombre $m$ supérieur à 0 strictement à partir d'un certain rang. La convergence de $(v_n)_n$ permet alors d'assurer que la quantitée ci-dessus peut-être rendue aussi petite que l'on veut ce qui justifie la convergence de $(\frac{1}{v_n})_n$ vers $\frac{1}{l'}$. On utilise ensuite le produit de $(u_n)_n$ par $(\frac{1}{v_n})_n$ pour obtenir la convergence de $(\frac{u_n}{v_n})_n$ vers $\frac{l}{l'}$.

**Proposition :**

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles avec $(u_n)_n$ qui tend vers $+\infty$.

- Si $(v_n)_n$ est minorée alors $(u_n + v_n)_n$ tend vers $+\infty$.
  Ceci est donc vrai en particulier si $(v_n)_n$ tend vers $+\infty$ ou $(v_n)_n$ converge vers une limite finie $l' \in \mathbb{R}$.
- S'il existe un réel strictement positif $M$ tel que à partir d'un certain rang les termes de la suite $(v_n)_n$ sont tous supérieurs à $M$, alors $(u_n v_n)_n$ tend vers $+\infty$.
  Ceci est donc vrai en particulier si $(v_n)_n$ tend vers $+\infty$ ou $(v_n)_n$ converge vers une limite finie *positive* $l' \in \mathbb{R}$.
- $(\frac{1}{u_n})_n$ converge vers 0.

## 3 Suites extraites et valeurs d'adhérence

**Définition :**

On appelle *suite extraite* (ou *sous suite*) de $(u_n)_n$ une suite dont le terme général est $u_{\phi(n)}$ où $\phi$ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans lui même.

**Définition :**

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. On dit que $a$ est une *valeur d'adhérence* de la suite $(u_n)_n$ ssi

$$\forall \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - a| < \epsilon$$

**Proposition :**

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $a$ est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$ ;
- tout intervalle de la forme $]a - \epsilon; a + \epsilon[$ avec $\epsilon > 0$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_n$ ;
- il existe une sous suite de $(u_n)_n$ tendant vers $a$.

**Preuve :**

- Si $a$ est une valeur d'adhérence, soit $\epsilon > 0$ donné, pour $N = 1, \exists n \geq N / |u_n - a| < \epsilon, i.e., u_n \in ]a - \epsilon; a + \epsilon[$. On pose $r_1 = n$.
Supposons $r_k$ construit pour tout $k \leq n$, vérifiant $\forall k \leq n, u_k \in ]a - \epsilon; a + \epsilon[$ et $\forall k \leq n + 1, r_{k+1} > r_k$.
Alors pour $N = r_n, \exists p \geq N / |u_p - a| < \epsilon$. On pose $r_{n+1} = p$.
Par récurrence, on a donc construit une suite infinie de termes $u_n$ tous distincts et vérifiant $u_n \in ]a - \epsilon; a + \epsilon[$.
- S'il existe une infinité de termes de la suite dans $]a - \epsilon; a + \epsilon[$, soit $u_p$ tel que $|u_p - a| < 1$, on pose $\phi(1) = p$.
Supposons construite pour tout $k \leq n$ une sous suite $(u_{\phi(k)})$ telle que $\forall k \leq n, |u_{\phi(k)} - a| < 1/k$, alors pour $\epsilon = 1/(n+1), \exists r > \phi(n) / |u_r - a| < 1/(n+1)$
Ainsi on construit par récurrence une sous suite extraite de $(u_n)$ qui tend vers $a$ : en effet, Soit $\epsilon > 0$,$\exists k \in \mathbb{N}* / \frac{1}{k} < \epsilon$ et $\forall n \geq k, |u_{\phi(n)} - a| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k} < \epsilon$.
- S'il existe une sous suite $(u_{\phi(n)})_n$ qui tend vers $a$, alors pour tout $\epsilon$ strictement positif et pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq p, |u_{\phi(n)} - a| < \epsilon$ donc, $\forall n \geq max(N, p), |u_{\phi(n)} - a| < \epsilon$

**Remarque :**
Un *point* $a$ est *adhérent* à une partie $A$ de $\mathbb{R}$ ssi tout intervalle de la forme $]a - \epsilon; a + \epsilon[$ avec $\epsilon > 0$ contient un point de $A$.
Il ne faut pas confondre ici valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$ et point adhérent à l'ensemble $\{u_n / n \in \mathbb{N}\}$ : toute valeur d'adhérence de la suite est point adhérent à $\{u_n / n \in \mathbb{N}\}$. mais la réciproque est fausse : ainsi toute valeur $u_p$ de la suite est adhérent à $\{u_n / n \in \mathbb{N}\}$ mais n'est pas en général valeur d'adhérence de $(u_n)_n$.

**Proposition :**

| $(u_n)_n$ tend vers une limite $l$ ssi toute suite extraite tend vers $l$. |
|---|

**Preuve :**
Si toute suite extraite tend vers $l$, en particulier $(u_n)_n$ tend vers $l$.
Réciproquement, si $(u_n)_n$ tend vers une limite $l$ que l'on supposera finie, les autres cas se démontrant de la même manière, on se donne une suite extraite $(u_{\phi(n)})_n$ de la suite $(u_n)_n$.
Alors $\forall \epsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, |u_n - l| < \epsilon$ donc, $\phi$ étant strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ on a $\phi(n) > n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $|u_{\phi(n)} - l| < \epsilon$ pour tout $n > p$.

**Exemple :**
$(u_n)_n$ définie par $u_n = \sin(\frac{n\pi}{7})$ n'est pas convergente.

**Preuve :**
En effet, $u_{14n} = \sin(\frac{14n\pi}{7}) = \sin(2n\pi) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $(u_{2n})_n$ converge vers 0 alors que
$u_{14n+1} = \sin(\frac{(14n+1)\pi}{7}) = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{7}) = \sin(\frac{\pi}{7})(-1)^{2n} = \sin(\frac{\pi}{7})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(u_{14n+1})_n$ converge donc vers $\sin(\frac{\pi}{7})$.

**Exemple :**
$(u_n)_n$ converge vers $l$ ssi les suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers $l$.

**Preuve :**
La condition nécessaire est évidente d'après la proposition III. Supposons donc que $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ tendent toutes les deux vers la même limite $l$.
$\forall \epsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N} / \forall n \geq N_1, |u_{2n-1} - l| < \epsilon$ et $\exists N_2 \in \mathbb{N} / \forall n \geq N_2 |u_{2n+1} - l| < \epsilon$
On pose $N = max\{2N_1; 2N_2 + 1\}$. Pour tout $n \geq N$, si $n$ est pair alors $n = 2k$ et $k \geq N_1$ donc $|u_{2k} - l| = |u_n - l| < \epsilon$ sinon $n$ est impair, $n = 2k + 1$, $k \geq N_2$ donc $|u_{2k+1} - l| = |u_n - l| < \epsilon$

# 4 Comparaison de suites et limites

**Proposition :**

Soient $(u_n)_n$ une suite réelle convergente, $l \in \mathbb{R}$ sa limite et $a \in \mathbb{R}$.
- S'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n$ supérieur ou égal à $N_1$, $u_n$ est supérieur ou égal à $a$, alors $l$ est supérieure ou égale à $a$.
- S'il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n$ supérieur ou égal à $N_2$, $u_n$ est inférieur ou égal à $a$, alors $l$ est inférieure ou égale à $a$.

**Théorème "de la limite monotone" :**

Si $(u_n)_n$ est croissante (resp. décroissante) alors : $lim_n = sup_n\{u_n\}$ (resp. $inf_n\{u_n\}$) et $(u_n)_n$ est convergente ssi elle est majorée (resp. minorée).

**Preuve :**
Par définition de la borne supérieure,
$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, sup_n\{u_n\} - \epsilon \leq u_N \leq sup_n\{u_n\}$ donc, $(u_n)_n$ étant croissante, $\forall n \geq N, sup_n\{u_n\} - \epsilon \leq u_N \leq u_n \leq sup_n\{u_n\}$. Même type de preuve pour le cas décroissant.

**Théorème "des gendarmes" :**

> Soient $(x_n)_n$, $(u_n)_n$ et $(y_n)_n$ trois suites réelles.
> - Si $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ convergent vers la même limite $l$ et si $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, x_n \leq u_n \leq y_n$, alors $(u_n)_n$ converge vers $l$.
> - Si $(x_n)_n$ diverge vers $+\infty$ et $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, x_n \leq y_n$ alors $(y_n)_n$ diverge vers $+\infty$
> - Si $(y_n)_n$ diverge vers $-\infty$ et $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, x_n \leq y_n$ alors $(x_n)_n$ diverge vers $-\infty$

**preuve :**

- Soit $\epsilon > 0$. $\lim_n x_n = l$ donne l'existence de $N' \in \mathbb{N}', \forall n \geq N', x_n \geq l - \epsilon$ $\lim_n y_n = l$ donne l'existence de $N'' \in \mathbb{N}, \forall n \geq N'', y_n \leq l + \epsilon$ Pour tout $n \geq max\{N; N'; N''\}$ on a donc $l - \epsilon \leq x_n \leq u_n \leq y_n \leq l + \epsilon$.
- Soit $M \in \mathbb{R}$, comme $\lim_n x_n = +\infty$, $\exists N' \in \mathbb{N}, \forall n \geq N', x_n \geq M$ donc pour tout $n \geq max\{N; N'\}$ on a $u_n \geq x_n \geq M$.
- Soit $M \in \mathbb{R}$, comme $\lim_n y_n = -\infty$, $\exists N'' \in \mathbb{N}, \forall n \geq N'', y_n \leq M$ donc pour tout $n \geq max\{N; N''\}$ on a $u_n \leq y_n \leq M$.

**Proposition :**

> Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles. Si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ et si $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$, alors $(v_n)_n$ tend vers $+\infty$.

# 5 Suites adjacentes

**Définition :**

> Deux suites réelles $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont dites *adjacentes* si les deux suites sont monotones, l'une croissante, l'autre décroissante et si $(u_n - v_n)_n$ converge vers 0.

**Proposition :**

> Deux suites adjacentes sont convergentes vers une limite commune.

**Théorème des segments emboîtés :**

Soit $(I_n)_n$ une suite de segments $I_n = [a_n; b_n]$ tels que
- pour tout $n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} \subset I_n$ ;
- $(b_n - a_n)_n$ converge vers 0.

Alors il existe un réel $l \in \mathbb{R}$ tel que $\cap I_n = \{l\}$.

**Preuve :**

Du fait que pour tout entier $n$, $I_{n+1} \subset I_n$ on déduit que $a_{n+1} \geq a_n$ et $b_{n+1} \leq b_n$. La suite $(a_n)_n$ est donc croissante, la suite $(b_n)_n$ décroissante. En outre, $(b_n - a_n)_n$ converge vers à donc les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes et sont donc convergentes vers une limite commune $l$.
S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $l \notin I_N$, alors $l > b_N$ ou $l < a_N$. On peut supposer que $l < a_n$, le raisonnement serait identique dans l'autre cas. Il existe donc $\epsilon > 0$ tel que pour tout $n \leq N,\ l + \epsilon < a_N < a_n$ c'est à dire $l - a_n > \epsilon$ ce qui impose que $(a_n)_n$ ne converge pas vers $l$ en contradiction avec ce qui a été justifié précédemment. Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N},\ l \in \cap I_n$.
Soit $l' \neq l$, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $|l - l'| > \epsilon$. Or $(b_n - a_n)_n$ étant convergente vers 0, il existe $N$ tel que $|b_N - a_N| < \frac{\epsilon}{2}$. Si $l' \in I_N$ alors $|l - l'| < |l - a_N| + |l' - a_N| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$, contrairement à ce qui précède. Donc $l' \notin I_n$ et $\cap I_n = \{l\}$.

**Théorème "de Bolzano-Weierstrass" :**

De toute suite bornée de nombres réels, on peut extraire une sous suite convergente.

**preuve :**

Soit $(u_n)_n$ une suite bornée. Il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $-M \leq u_n \leq M$.
Construisons une suite $(I_n)_n$ d'intervalles de la forme $[a_n; b_n]$ vérifiant $I_n$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_n$, le diamètre $\delta(I_n) \leq \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$ où $\delta(I_n)$ désigne le diamètre de $I_n$ et $I_{n+1} \subset I_n$.
On pose $a_0 = -M$, $b_0 = M$ et donc $I_0 = [-M; M]$ qui vérifie de manière évidente les trois conditions précédentes.
Supposons $I_k = [a_k; b_k]$ construit jusqu'à un rang $n$.
Alors $[a_n; \frac{a_n+b_n}{2}]$ ou $[\frac{a_n+b_n}{2}; b_n]$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_n$.
Si $[a_n; \frac{a_n+b_n}{2}]$ contient une infinité de termes de la suite, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ sinon on pose $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.
Dans les deux cas, $I_{n+1} \subset I_n$ et $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} \leq \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}(b_0 - a_0) \leq \frac{1}{2^n+1}(b_0 - a_0)$ donc $I_{n+1}$ vérifie les trois conditions énoncées.
Par récurrence on construit donc la suite $(I_n)_n$.

Construisons ensuite une sous suite $(u_{\varphi(n)})_n$ de la suite $(u_n)_n$ telle que
$\forall n \in \mathbb{N} u_{\varphi(n)} \in I_n$.
On pose $\varphi(0) = 0$ et de manière évidente $u_0 \in I_0 = [a_0; b_0]$
Supposons construite jusqu'à un rang $n$, $\varphi(k)/0 \leq k \leq n$ vérifiant
$\forall k \leq n-1, \varphi(k+1) > \varphi(k)$ et $\forall k \in \{0; \ldots; n\} \varphi(k) \in I_k$.
On a $I_{n+1} \subset I_n$ et $I_{n+1}$ possède une infinité de termes de la suite $(u_n)_n$. Il existe donc $p > \varphi(p)/u_p \in I_{n+1}$. On pose alors $\varphi(n+1) = p$. et qui vérifie les conditions voulues. Par récurrence, on construite donc la suite $(u_\varphi(n))_n$.
Par construction, cette sous suite converge vers $\cap I_n$ qui est un singleton $\{l\}$ avec $l \in \mathbb{R}$ d'après le théorème des segments emboîtés.