Etude de suites définies par différents types de récurrence

F.Gaudon

22 juillet 2005

Table des matières

Dans ce qui suit, on considère un corps $\mathbb{K} = \mathbb{R} ou \mathbb{C}$.

1 Suites arithmétiques

Définition :

Une *suite arithmétique* est donnée par son premier terme u_0 et sa raison r :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r \\ u_0 \in \mathbb{K} \end{cases}$$

Proposition :

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$
- $u_0 + u_1 + ... + u_n = (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$

Preuve :
Par récurrence, les deux propriétés sont trivialement vraies au rang $n = 0$. Si elles sont vraies au rang $n \in \mathbb{N}$, on a :
$u_{n+1} = u_n + r = u_0 + nr + r = u_0 + (n+1)r$ et
$u_1 + \ldots + u_{n+1} = (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2} + u_{n+1} = (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2} + u_0 + (n+1)r = (n+2)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2} + r\frac{2(n+1)}{2} = (n+2)u_0 + \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Donc les propriétés sont vraies au rang $n+1$ et par récurrence, elles sont donc vraies pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 Suites géométriques

Définition :

Une *suite géométrique* est donnée par son premier terme u_0 et sa raison q (non nulle en général) :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n \\ u_0 \in \mathbb{K} \end{cases}$$

Proposition :

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n u_0$
- $u_0 + u_1 + ... + u_n = \begin{cases} (n+1)u_0 & \text{si } q = 1 \\ u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$ Cette somme converge si et seulement si $|q| < 1$. La limite de la somme vaut alors $\frac{u_0}{1-q}$.

Preuve :
Par récurrence. Les deux propriétés sont vraies au rang $n = 0$. Supposons qu'elles sont vraies à un rang $n \in \mathbb{N}$. On a alors $u_{n+1} = qu_n = qq^n u_0 = q^{n+1}u_0$ d'une part. D'autre part, si $q = 1$, on a $u_1 + \ldots + u_{n+1} = (n+1)u_0 + u_{n+1} = (n+1)u_0 + u_0 = (n+2)u_0$ et si $q \neq 1$, on a $u_1 + \ldots + u_{n+1} = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + u_{n+1} = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1}u_0 = u_0(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{(1-q)q^{n+1}}{1-q}) = u_0 \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$. Les deux propriétés sont donc vraies au rang $n+2$ et par récurrence elles sont vraies pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3 Suites arithmético-géométriques

Définition :

Une *suite arithmético-géométrique* est définie par :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b \\ u_0 \in \mathbb{K} \end{cases}$$

avec $b \neq 0$ et $a \neq 1$, sinon on retrouve les suites précédentes.

Définition

Une suite particulière est obtenue pour la suite constante l telle que $l = al + b$. Cette valeur l est d'ailleurs la limite éventuelle de la suite si elle converge. Soit $(v_n)_n$ la suite auxiliaire définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - l$
On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = av_n$. Autrement dit, la suite $(v_n)_n$ est une suite géométriques de raison a. On a $v_n = a^n v_0$ et $u_n = l + a^n(u_0 - l)$.
La suite converge donc ssi $|a| < 1$ ou $u_0 = l$.

4 Suites récurrentes linéaires

Définition :

Une *suite récurrente linéaire* est définie par :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \\ u_1 \in \mathbb{K} \\ u_2 \in \mathbb{K} \end{cases}$$

avec $b \neq 0$

Les suites géométriques r^n non nulles solution de cette récurrence vérifient : $r^2 = ar + b$. Soit r solution (éventuellement complexe). Cherchons les autres solutions sous la forme : $u_n = v_n r^n$. On obtient :

$$v_{n+2}r^2 = arv_{n+1} + bv_n$$

$$\Leftrightarrow v_{n+2}(ar + b) = arv_{n+1} + bv_n$$

$$\Leftrightarrow (ar + b)(v_{n+2} - v_{n+1}) = -b(v_{n+1} - v_n)$$

Donc la suite $v_{n+2} - v_{n+1}$ est une suite géométrique de raison $\frac{-b}{ar+b}$ ou $\frac{-b}{r^2}$ ou enfin r'/r si r' est l'autre racine. On a donc : $v_n - v_{n-1} = C(\frac{r'}{r})^n$, où C est une constante. On en déduit que : $v_n = C(\frac{r'}{r})^n + C(\frac{r'}{r})^{n-1} + \ldots + C(\frac{r'}{r}) + v_0$.

- Si $r = r'$ alors v_n est de la forme $\alpha n + \beta$ et u_n est combinaison des suites r^n et nr^n.
- Si $r \neq r'$ alors v_n est de la forme $\alpha(\frac{r'}{r})^n + \beta$, et u_n est combinaison de r^n et de r'^n.

proposition :

Soit la relation de récurrence $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. On associe à cette relation l'équation caractéristique $r^2 = ar + b$. L'ensemble des suites solutions forme un espace vectoriel de dimension 2 dont une base est :

- si le discriminant est non nul : $(r_1^n)_n$ et $(r_2^n)_n$ où r_1 et r_2 sont solutions de l'équation caractéristique. Dans le cas d'un discriminant négatif sur $\mathbb{R}$, on prend $(Im(r_1^n))_n$ et $(Re(r_1^n))_n$;
- si le discriminant est nul : $(r^n)_n$ et $(nr^n)_n$ où r est racine double de l'équation caractéristique.

preuve :

Posons $\mathcal{S} = \{(u_n)_n / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$ $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites. Cet espace est de dimension 2. En effet, considérons les deux suites particulières U et V éléments de $\mathcal{S}$, définies par $U_0 = 1$ et $U_1 = 0$,$V_0 = 0$ et $V_1 = 1$. On prouve facilement par récurrence que toute suite u de $\mathcal{S}$ s'écrit : $u = u_0 U + u_1 V$ Cette décomposition est unique. Ceci

prouve que $(U; V)$ constitue une base de $\mathcal{S}$. Cette base est malheureusement de peu d'utilité car elle ne permet pas de calculer le terme général de la suite.
Cherchons donc une autre base. Cherchons les éléments de $\mathcal{S}$ qui sont des suites géométriques $(r_n)_n$. r doit alors vérifier :

$$r^2 = ar + b$$

Cette équation est appelée équation caractéristique associée à la suite.
Plusieurs cas sont à considérer :

- sur $\mathbb{C}$:
  si le discriminant est non nul, il y a deux suites différentes de raisons r_1 et r_2. Il n'est pas difficile de montrer que ces deux suites forment un système libre et donc une base de $\mathcal{S}$. Cette base permet de calculer le terme général de toute suite de $\mathcal{S}$;
  si le discriminant est nul, alors il y a une racine unique r, égale à $\frac{a}{2}$, et $b = -\frac{a^2}{4}$. Cherchons une autre suite sous la forme $v_n r^n$. On obtient alors :

$$v_{n+2}r^2 = av_{n+1}r + bv_n$$

$$\Leftrightarrow v_{n+2}\frac{a^2}{4} = a^2\frac{v_{n+1}}{2} - a^2\frac{v_n}{4}$$

$$\Leftrightarrow v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n$$

$$\Leftrightarrow v_{n+2} - v_{n+1} = v_{n+1} - v_n$$

  Ainsi $v_{n+1} - v_n$ est constante. On peut prendre par exemple comme solution particulière $v_{n+1} - v_n = 1$ c'est à dire $v_n = n$. Les deux suites $(r^n)_n$ et $(nr^n)_n$ sont indépendantes. Elles forment une base de $\mathcal{S}$
- sur $\mathbb{R}$:
  si le discriminant est positif, c.f. ci-dessus ;
  si le discriminant est nul, c.F. ci-dessus ;
  si le discriminant est négatif, alors, en tant que sous espace vectoriel complexe, on peut prendre comme base les suites géomériques de raison r_1 et r_2, nécessairement conjuguées si a et b sont réels. Mais on peut prendre également $Re(r_1^n)$ et $Im(r_2^n)$ qui, étant combinaisons linéaires de r_1^n et r_2^n sont bien éléments de $\mathcal{S}$, sont réelles, et engendrent $\mathcal{S}$.

Exemples :

- $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$
- $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (suite de Fibonacci)

5 Suites récurrentes

Définition :

Une suite est dite *récurrente* si elle est définie par : $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 \in I$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f est une fonction définie et continue sur I. De façon que la suite soit définie pour tout n, nous supposerons que $f(I)$ est inclus dans I.

Dans la suite, on se donne une suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ si } n \geq 0 \end{cases}$$

où f est une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans I.

5.1 Monotonie

Proposition :

Si f est croissante sur I alors $(u_n)_n$ est monotone :
- $(u_n)_n$ est croissante si $f(u_0) > u_0$
- $(u_n)_n$ est décroissante si $f(u_0) < u_0$

Preuve :
Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_(n+1) - u_n$ est du signe de $u_1 - u_0$.
C'est vrai pour $n = 0$ de manière évidente, supposons la propriété vraie pour un rang n. On a alors :

$$u_{n+2} - u_{n+1} = f(u_{n+1}) - f(u_n)$$

qui est du signe de $u_{n+1} - u_n$ puisque f est croissante. Par hypothèse de récurrence $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $u_1 - u_0$ donc $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $u_1 - u_0$.

Proposition :

Si f est décroissante, alors les deux suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones de sens opposé.

preuve :
Si f est décroissante, $f \circ f$ est croissante donc par la proposition précédente $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones. On a en outre $u_{2n+2} - u_{2n}$ qui est du même signe que $u_2 - u_0$ et $u_{2n+1} - u_{2n-1}$ de même signe que $u_3 - u_1$. Si $f \circ f(u_0) > u_0$ alors $u_2 - u_0 > 0$ et $f \circ f(f(u_0)) < f(u_0)$ donc $u_3 - u_1 < 0$ donc $(u_{2n+1})_n$ est croissante et $(u_{2n})_n$ est décroissante. Si $f \circ f(u_0) < u_0$, $(u_{2n})_n$ est décroissante et $u_{2n+1})_n$ est croissante.

5.2 Etude de la convergence

On suppose dans la suite que f est continue d'un intervalle I fermé dans lui-même.

Proposition :

Si $(u_n)_n$ converge vers l, alors $l \in [a;b]$ et $f(l) = l.l$ est donc un point fixe de f.

Preuve :
Par continuité de f, si $(u_n)_n$ converge vers l, alors $(f(u_n)_n)$ converge vers $f(l)$, Mais $f(u_n) = u_{n+1}$ donc par unicité de la limite $l = f(l)$.

Conséquence :
Si f n'a pas de point fixe, $(u_n)_n$ diverge.

Remarques :
- Une fonction continue peut avoir un seul point fixe et la suite $(u_n)_n$ peut diverger. En effet, par exemple, $f : x \leftarrow -x$ sur $[0;1]$ admet 0 pour unique point fixe et la suite $(u_n)_n$ associée diverge.
- Si $I = [a;b]$ alors f admet au moins un point fixe.
  Preuve :
  Soit $g : I \leftarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in I \ g(x) = f(x) - x$. On a $g(a) = f(a) - a \geq 0$, $g(b) = f(b) - b \leq 0$ et g est continue sur I donc par la théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a;b]$ tel que $g(c) = 0$ c'est à dire $f(c) = c$

Dans la suite, on supposera I fermé borné, i.e. $I = [a;b]$ avec $a < b$.

Proposition :

On suppose f croissante sur I : $\forall u_0 \in I$, $(u_n)_n$ est monotone et converge vers l'un des points fixes de f.

Preuve :
On a vu que f admet au moins un point fixe, que $(u_n)_n$ est monotone. Comme elle est bornée, elle admet donc une limite qui ne peut-être qu'un point fixe de f.

Remarque :
Si f est strictement décroissante, f admet un unique point fixe, envisager la convergence de la suite $(u_n)_n$.

Preuve :
On a vu que f admet un point fixe. Montrons qu'il est unique. Si l_1 et l_2 sont deux points fixes distincts, on peut supposer $l_1 < l_2$ et on a alors $f(l_1) > f(l_2)$ puisque f est strictement décroissante. Or pour $i \in \{1;2\},\ f(l_i) = l_i$ donc $l_1 > l_2$ ce qui est absurde et montre l'unicité.

Proposition :

On suppose f k-contractante sur I, c'est à dire $\forall (x;y) \in I^2\ |f(x) - f(y)| \leq |x - y|$. Alors f admet un unique point fixe l et $\forall u_0 \in I$, $(u_n)_n$ converge vers l.

preuve :
Sous réserve d'existence, montrons d'abord l'unicité. Si l_1 et l_2 sont deux points fixes pour f on a donc $f(l_1) = l_1$ et $f(l_2) = l_2$. Par suite $\|l_1 - l_2\| = \|f(l_1) - f(l_2)\| \leq k\|l_1 - l_2\|$ donc $(1-k)\|l_1 - l_2\| \leq 0$ ce qui impose $l_1 - l_2\| = 0$ d'où l'unicité. Pour l'existence, soit $(u_n)_n$ la suite définie précédemment. Montrons qu'elle est de Cauchy. Soient donc n et p entiers :

$$\begin{aligned}
\|u_n - u_p\| &= \| \textstyle\sum_{l=0}^{p-1} u_{n+l+1} - u_{n+l}\| \\
&\leq \textstyle\sum_{l=0}^{p-1} \|u_{n+l+1} - u_{n+l}\| \\
&= \textstyle\sum_{l=0}^{p-1} \|f(u_{n+l}) - f(u_{n+l-1})\| \\
&\leq k \textstyle\sum_{l=0}^{p-1} \|u_{n+l} - u_{n+l-1}\| \\
&\leq \ldots \leq \textstyle\sum_{l=0}^{p-1} k^{n+l-1}\|u_1 - u_0\| \\
&= k^{n-1} \textstyle\sum_{l=0}^{p-1} k^l \|u_1 - u_0\| \\
&= k^{n-1} \tfrac{1-k^p}{1-k} \|u_1 - u_0\| \\
&\leq \tfrac{k^{n-1}}{1-k} \|u_1 - u_0\|
\end{aligned}$$

quantité qui tend visiblement vers 0 quand n tend vers ∞ indépendamment de p. Donc la suite $(u_n)_n$ est de Cauchy dans I complet et par conséquent elle converge vers une limite l. On a :
$\forall n \in \mathbb{N}\|l - f(l)\| = \|l - u_{n+1} + f(u_n) - f(l)\| \leq \|l - u_{n+1}\| + \|f(u_n)_f(l)\| \leq \|l - u_{n+1}\| + k\|u_n - f(l)\|$. Comme $(u_n)_n$ converge vers l, cette quantité peut donc être rendue aussi petite que l'on veut et par conséquent $l = f(l)$.