Séries à termes réels positifs, cours de premier cycle universitaire

F.Gaudon

9 août 2005

Table des matières

Dans ce qui suit on considère un espace de Banach E.

1 De l'intérêt des séries à termes positifs

Définition :

On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ dans E est *normalement* (ou *absolument* si $E = \mathbb{R}$) *convergente* ssi la série $\sum_{n\geq 0} \|u_n\|$ est convergente dans $\mathbb{R}$.

Remarque :
$\sum_{n\geq 0} \|u_n\|$ est une série à termes positifs.

Théorème :

Toute série normalement convergente est convergente.

Preuve :
Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ telle $\sum_{n\geq 0} \|u_n\|$ converge. Soit $S_N = \sum_{k=0}^{N} u_k$ et $s_N = \sum_{k=0}^{N} \|u_k\|$.
On a $s_{n+p} - s_n = \sum_{k=1}^{p} \|u_{n+k}\|$ et $S_{n+p} - S_n = \sum_{k=1}^{p} u_{n+k}$. Donc

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}\| \leq \sum_{k=1}^{p} \|u_{n+k}\| = s_{n+p} - s_n$$

Par conséquent, si $(s_N)_N$ converge alors elle est de Cauchy et la majoration précédente montre que $(S_N)_N$ est aussi de Cauchy et comme E est complet $(S_N)_N$ converge.

2 Etude des séries à termes positifs

Théorème :

- Une série à termes positifs est convergente si et seulement si ses sommes partielles sont bornées.
- Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites positives telles que pour n assez grand : $x_n \leq y_n$. Alors
  - Si $\sum y_n$ converge, alors $\sum x_n$ aussi
  - Si $\sum x_n = +\infty$, alors $\sum y_n = +\infty$

Preuve :

Proposition :

Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites positives.

- Si $x_n = O(y_n)$ et si $\sum y_n$ converge, alors $\sum x_n$ converge
- Si $x_n \sim y_n$ alors $\sum x_n$ et $\sum y_n$ sont de même nature

Théorème (Séries de Riemann) :

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Application :
Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ une série à termes positifs. S'il existe $\alpha \in]1; +\infty[$ tel que $lim_{n\to\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge.

Théorème (Série géométrique) :

Soit $r \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n$, appelée *série géométrique*, converge si et seulement si $|r| < 1$. De plus, si |r|<1, alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

Proposition (règle de d'Alembert) :

On suppose que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$, que $(a_n)_n$ ne s'annule qu'en un nombre fini de rangs et que $\limsup \frac{u_n+1}{u_n} = l$ et que la suite $(u_n)_n$ n' a qu'un nombre fini de termes nuls.

- Si $l < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge
- Si $l > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge vers $+\infty$

Preuve :

- Si $l < 1$, soit r tel que $l < r < 1$. $\exists N$, $\forall n \geq N$ $\frac{u_{n+1}}{u_n} < r$

$$u_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_n}\frac{u_n}{u_{n-1}} \times \ldots \frac{u^{N+1}}{u_N} \times u_N < x^{n-N}$$

  Remarque : aucun terme de $(u_n)_n$ ne doit être nul : on enlève les termes nuls. Par comparaison, la série converge donc.
- Si $l > 1$, soit r tel que $l > r > 1$.

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \exists n_N \geq N\ /\ \frac{u_{n_N+1}}{u_{n_N}} \geq r$$

  La suite extraite $(u_{n_N})_N$ est strictement croissante et donc ne tend pas vers 0 lorsque N tend vers l'infini. Le terme général de la série, u_n, ne tend pas vers 0 donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

Proposition (Règle de Cauchy) :

On suppose que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$ et que $\limsup \sqrt[n]{u_n} = 1$.
Alors on a les mêmes conclusions que pour la règle de d'Alembert.

Preuve :

- Si $l < 1$, soit r tel que $l < r < 1$, $\exists N$ / $\forall n \geq N$ $\sqrt[n]{u_n} < r$ donc $u_n < r^n$. D'après le critère de comparaison $\sum_n x_n$ converge.
- Si $l > 1$, soit r tel que $l > r > 1$, $\forall N$ $\exists n_N \geq N$ / $\sqrt[n]{u_n} > r$ d'où $u_{n_N} > r^{n_N}$. Comme $r > 1$, la série diverge.

Remarque :
Le principe de la démonstration des règles de d'Alembert et de Cauchy consiste à comparer la série à une série géométrique : ces règles ne peuvent donc s'appliquer que pour une série convergente dont le terme général tend vers zéro plus vite su'une suite géométrique de raison $q \in [0; 1[$, ou pour une série divergente dont le terme général tend vers $+\infty$ plus vite q'une suite géométrique de raison $q > 1$. Cela explique qu'elles ne s'appliquent pas par exemple aux séries de Riemann puisque $q^n = o(\frac{1}{n^\alpha})$ pour α réel et $q \in [0; 1[$ et $\frac{1}{n^\alpha} = o(q^n)$ pour $q > 1$.

Théorème :

Soit f une fonction de $[n_0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$ où $n_0 \in \mathbb{N}$, continue par morceaux et décroissante.
Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = f(n)$. Alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ et l'intégrale généralisée $\int_{n_0}^{+\infty} f(x)dx$ sont de même nature et s'il y a convergence, on a :

$$\forall n \geq n_0 \ \int_{n+1}^{+\infty} f \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_{n}^{+\infty} f$$

Preuve :

$$\forall x \in [n;n+1[,\ f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$$

donc

$$\int_n^{n+1} f(n+1)dx \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq \int_n^{n+1} f(n)dx$$

d'où

$$u_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq u_n$$

Par conséquent,

$$S_N \geq \sum_{k=1}^{N} \int_k^{k+1} f(x)dx = \int_1^{N+1} f(x)dx$$

et

$$S_N \leq \sum_{k=0}^{N-1} \int_k^{k+1} f(x)dx = \int_0^{N} f(x)dx$$

Quand n tend vers $+\infty$, si la série converge, $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge et si $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge alors la série converge.

Exercice :

Soit $(x_n)_n$ une suite à temes strictement positifs telle que $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = l$. Alors $\lim \sqrt[n]{x_n} = l$. Ainsi si la règle de d'Alembert a échouée, il est inutile d'essayer celle de Cauchy). Etudier la réciproque.

Si les règles de d'Alembert et Cauchy ont échouées, on peut essayer la suivante :

Proposition (Règle de Rabbe-Duhamel) :

Soit $(x_n)_n$ une suite à termes strictement positifs telle que :

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})$$

Alors :
- Si $\alpha > 1$ alors $\sum x_n$ converge
- Si $\alpha < 1$ alors $\sum x_n$ diverge

Exercice (Séries de Bertrand) :
Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ fixé, $\sum_{n\leq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge ssi :

$$\alpha > 1$$

ou

$$\alpha = 1 \; et \; \beta > 1$$

Exercice :
Etudier la nature de la série de terme général $u_n = (-1)^n \frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{n!}$