Séries entières. Rayon de convergence. Propriétés de la somme.

F.Gaudon

9 août 2005

Table des matières

1 Définition, convergence **2**

2 Propriétés de la somme **3**

3 Développement en série entière **5**

On désigne par $\mathbb{K}$ le corps des réels ou celui des complexes.

1 Définition, convergence

Définition :

On appelle *série entière* toute série $\sum_{n\geq 0} f_n$ de fonctions définies de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par $f_n(z) = a_n z^n$ où $(a_n)_n$ est une suite de $\mathbb{K}$.

Définition :

Soit $(a_n)_n$ une suite de $\mathbb{K}$. L'ensemble des réels r positifs ou nuls pour lesquels la suite $(a_n r^n)_n$ est bornée est non vide car il contient 0.
Sa borne supérieure R, éventuellement infinie, est appelée *rayon de convergence* de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

Exemple :

- Le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} n! z^n$ est $R = 0$
- Celui de $\sum_{n\geq 0} z^n$ est $R = 1$.
- $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $R = +\infty$.

Proposition :

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière, et soit R son rayon de convergence.

- Si $|z_0| < R$, alors la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$ est absolument convergente donc convergente.
- Si $|z_0| > R$, alors la suite $(a_n z_0^n)_n$ n'est pas bornée donc ne converge pas vers 0 et $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$ diverge.
- Si $0 < R' < R$, notons $\overline{D(0; R')}$ le disque fermé dans $\mathbb{C}$ de centre O et de rayon R'. Alors $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge uniformément dans $D(\bar{O}; R')$.

Preuve :

- On a $|a_n z_0^n| \leq |a_n| (\frac{|z_0}{R'})^n R'^n$ pour $|z_0| < R' < R$. De ce fait, $(|a_n R'^n|)_n$ est bornée. Soit $M = \sup_n\{|a_n| R'^n\}$. Alors, $|a_n z_0^n| \leq M (\frac{|z_0}{R'})^n$. Comme $\frac{|z_0|}{R'} < 1$, la série $\sum_n (\frac{|z_0|}{R'})^n$ converge et par comparaison, $\sum_n a_n z_0^n$ aussi.
- clair
- Soit R'' tel que $R' < R'' < R$ et $(|a_n| R''^n)_n$ bornée. Soit $M = \sup_n\{|a_n R''^n\}$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $|a_n z^n| \leq |a_n| R'^n \leq |a_n| R''^n (\frac{R'}{R''})^n \leq M (\frac{R'}{R''})^n$.

Définition :

En supposant $R \neq 0$, $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| < R\}$ est appelé *disque ouvert de convergence* de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

Remarque :

Il se peut qu'une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ ne soit pas normalement convergente sur son disque ouvert de convergence. C'est le cas par exemple pour la série entière $\sum_{n\geq 0} z^n$.

Proposition :

Le rayon de convergence R est donné par :

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$

Règle de D'Alembert :

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière et soit R son rayon de convergence. On suppose que les coefficients a_n sont non nuls à partir d'un certain rang. Si $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lambda \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, alors $R = \frac{1}{\lambda}$ (avec $R = +\infty$ si $\lambda = 0$ et $R = 0$ si $\lambda = +\infty$).

2 Propriétés de la somme

Proposition :

La somme $S : z \mapsto S(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est continue sur le disque ouvert de convergence.

Preuve :

Soit $z_0 \in D(O;R)$ et $R' > 0$ tel que $|z_0| < R' < R$. Alors $\sum_n a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D(O;R')}$ donc, $z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ étant continue pour tout entier n sur $\overline{D(O;R')}$, sa somme l'est aussi d'où S est continue sur $\overline{D(O;R')}$ et donc en particulier en z_0.

Proposition :

Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons $R > 0$ et $R' > 0$. On suppose que les sommes de ces deux séries coïncident sur un voisinage de 0. Alors ces deux séries sont identiques : $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = b_n$.

Preuve :

Sinon $\exists N \mathbb{N} \ / \ a_N \neq b_N$. Soit alors N le plus petit tel. Il existe $r > 0$ tel que $r < R$, $r < R'$ et les deux sommes coîncident sur $D(O;R)$. On a alors :

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n = z^N \sum_{n\geq N} a_n z^{n-N} + \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n$$

et

$$\sum_{n\geq 0} b_n z^n = z^N \sum_{n\geq N} b_n z^{n-N} + \sum_{n=0}^{N-1} b_n z^n$$

Comme les deux séries sont égales et $\forall n \leq N-1$ $a_n = b_n$ alors pour tout $z \in D(O;r)$, on a $\sum_{n\geq N} a_n z^{n-N} = \sum_{n\geq N} b_n z^{n-N}$. En particulier, pour $z=0$ on obtient $a_N = b_N$ d'où une contradiction.

Conséquences :

La somme $S(z)$ de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est une fonction paire (resp. impaire) ssi les a_n de rang impair (resp. pair) sont nuls.

Preuve :
Si $\sum_n a_n z^n$ est paire, $\sum_n a_n z^n = \sum_n a_n (-z)^n$ pour tout n donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n = (-1)^n a_n$ et en particulier $\forall k \in \mathbb{N}$ $a_{2k+1} = (-1) a_{2k+1}$ ce qui implique $a_{2k+1} = 0$.

Proposition :

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ une série entière réelle, de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $S(t)$.

- S est indéfiniment dérivable sur $]-R;R[$ et :

$$\forall t \in]-R;R[,\ S^{(k)}(t) = \sum_{n\geq k} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n t^{n-k}$$

- Si $[a;b] \subset]-R;R[$ alors :

$$\int_a^b S(t)dt = \sum_{n\geq 0} a_n \int_a^b t^{n+1} dt$$

Lemme :
Pour toute série entière $A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence R, les séries entières suivantes ont aussi pour rayon de convergence R :

$$A'(z) = \sum_{n\geq 0} n a_n z^{n-1}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}\ A^{(k)}(z) = \sum_{n\geq k} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n z^{n-k}$$

et

$$B(z) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{z^n}{n+1}$$

Preuve du lemme :

Preuve du théorème :

- Soit $0 < R' < R$. S converge en 0, S_N est dérivable sur $D(O;R')$ et $z \mapsto \sum_{n\geq 0} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}$ converge normalement sur $D(O;R')$ donc par le théorème de dérivation pour les suites de fonctions, S est dérivable sur $D(O;R')$ et $S'(t) = \sum_{n\geq 1} n a_n t^{n-1}$. Par récurrence on montre le résultat à l'ordre k.
- Conséquence du téorème d'intégration des suites de fonctions.

Conséquence :

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ une série entière réelle de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $S(t)$. Pour tout entier n, le coefficient a_n est égal à $\frac{1}{n!} S^n(0)$.

Preuve :
clair

3 Développement en série entière

Définition :

Soit f une application définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f est *développable en série entière* en un point t_0 de Ω s'il existe une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ et un réel $\rho > 0$ tels que :

$$\forall t \in]t_0 - \rho; t_0 + \rho[, \;\; f(z) = \sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n$$

Définition :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 et f infiniment dérivable sur Ω. La série entière $\sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{1}{!n} f^{(n)}(0) t^n$ est appelée *série de Taylor* de f en 0.

Proposition :

Si f est développable en série entière au voisinage de 0, alors f est de classe C^∞ à l'origine et la série entière égale à f au voisinage de 0 est nécessairement la série de Taylor de f. Autrement dit,

$$\exists r > 0, \; \forall t \in]-r; r[, \;\; f(t) = \sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n$$

Preuve :
Découle directement de la conséquence 2.

Remarque :
Même si f est de classe C^∞ au voisinage de 0, et même si la série de Taylor de f a un rayon de convergence strictement positif, on ne peut affirmer que f est développable en série entière en 0. Considérer $f : x \mapsto \exp(-\frac{1}{x^2})$.

Proposition :

> Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 et f une application de Ω dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est de classe C^∞ au voisinage de 0 et que :
>
> $$\exists r > 0,\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in]-r;r[\ |f^{(p)}(x)| \leq M$$
>
> Alors f est développable en série entière en 0 avec un rayon de convergence au moins égal à r.

Preuve :
D'après la formule de Taylor-Young à l'ordre n puisque f est de classe C^n et $n+1$ fois dérivable sur $]-\rho;\rho[$ où $0 < \rho < r$ on a :

$$\forall t \in]-\rho;\rho[\ \exists c \in]-\rho;\rho[\ |f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}t^k| \leq \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}(2\rho)^{n+1}$$

donc

$$\forall t \in]-\rho;\rho[\ |f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}t^k| \leq \frac{M}{(n+1)!}(2\rho)^{n+1}$$

ce qui montre que lorsque n tend vers $+\infty$ la série de Taylor de f converge vers f pour tout t dans $]-\rho;\rho[$ et par suite dans $]-r;r[$.