Convergence absolue et semi-convergence, cours de premier cycle universitaire

F.Gaudon

9 août 2005

Table des matières

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.

1 Convergence absolue

Définition :

On dit qu'une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ à termes dans $\mathbb{K}$ est *absolument convergente* si $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge.

Théorème :

Soit $\sum u_n$ une série à termes dans $\mathbb{K}$. Si $\sum u_n$ converge absolument alors $\sum u_n$ converge et :

$$|\sum_{n\geq 0} u_n| \leq \sum_{n\geq 0} |u_n|$$

Proposition :

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\sum_{n\geq 0} u_n + \lambda v_n$ est absolument convergente.

2 Semi-convergence

2.1 Définition

Définition :

Une série convergente non absolument convergente est dite *semi-convergente*.

2.2 Cas des séries alternées

Définition :

On dit qu'une série $\sum u_n$ à termes réels est *alternée* si la suite $((-1)^n u_n)_n$ est de signe constant.

2.2.1 Théorème pour l'étude de séries alternées

Théorème :

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels alternée. Si $(|u_n|)_n$ est décroissante et tend vers 0 quand n tend vers l'infini, alors $\sum u_n$ converge.

Exemple :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

2.2.2 Utilisation d'un développement asymptotique pour l'étude des séries alternées

Exemple :

$$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$$

2.2.3 Evaluation du reste de séries alternées

Proposition :

Si la série réelle $\sum u_n$ est alternée, telle que $(|u_n|)_n$ décroît et tend vers 0, alors d'après le théorème sur les séries alternées, elle converge et son reste R_n d'ordre n vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \; |R_n| \leq |u_{n+1}|$$

avec $R_n = \sum_{k\geq n+1} u_k$.

2.3 Sommation par paquets

Définition :

Soit $\sum u_n$ une série. On appelle *extractrice* toute application $\sigma \ : \ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.

Définition :

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = \sum_{k=\sigma(n)}^{\sigma(n+1)-1} u_k$ où σ est une extractrice. On dit que la série $\sum v_n$ a été obtenue par *groupement de termes* à partir de la série $\sum u_n$. Les v_n sont souvent appelés paquets, $\sigma(n+1) - \sigma(n)$ s'appelle la longueur du paquet v_n.

Proposition :

Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{k=\sigma(0)}^{+\infty} u_k$.

Théorème de groupement de termes :

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes dans $\mathbb{K}$ et $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante ; on note, pour $n \in \mathbb{N}, v_n = \sum_{k=\sigma(n)}^{\sigma(n+1)-1} u_k$. Si $(u_n)_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini et si $(\sigma(n+1) - \sigma(n))_n$ est bornée, alors les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature et, dans le cas de convergence, on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{k=\sigma(0)}^{+\infty} u_k$