Convergence uniforme et normale des séries de fonctions, cours de premier cycle universitaire

F.Gaudon

9 août 2005

Table des matières

1 Définitions

On se donne une suite $(f_n)_n$ d'applications d'un espace de Banach X dans un autre espace de Banach E.

Définition :

Soit $(f_n)_n$ une suite d'applications de X dans E. Pour tout entier N, on définit l'application $S_N : X \to E$ par $S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} f_n(x)$. Les fonctions S_N sont appelées *sommes partielles* de la *série de fonctions* $\sum_{n\geq 0} f_n$.

Définition :

On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ est *simplement convergente* sur X si la suite de fonctions $(S_N)_N$ est simplement convergente sur X. Cela revient à dire que pour tout x de X, la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est convergente dans E.

Définition :

On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ est *uniformément convergente* sur X si la suite $(S_N)_N$ des sommes partielles est uniformément convergente sur X.

Proposition :

Si une série de fonctions est uniformément convergente, alors elle est simplement convergente.

Preuve :
Immédiat

Remarque :
Soit $\sum_{n\geq 0} f_n$ une série de fonctions, simplement convergente.
Pour tout N de $\mathbb{N}$, soit $R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n$ le reste d'indice N de cette série. Dire que la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ est uniformément convergente sur X, c'est dire que la suite $(R_N)_N$ converge uniformément vers la fonction nulle. Cela équivaut à écrire :

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N_0 \in \mathbb{N}\ \forall N \geq N_0\ \forall x \in X\ |\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)| \leq \epsilon$$

Proposition :

Si $\sum_{n\geq 0} f_n$ convergesimplement (resp. uniformément) sur X, alors la suite $(f_n)_n$ converge simplement (resp. uniformément) vers la fonction nulle.

Preuve :

Pour la convergence uniforme, $(f_n)_n$ converge uniformément donc $(S_N)_N$ est de Cauchy uniforme. Par conséquent,

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n, m \geq N \ \forall x \in X \ \|S_n(x) - S_m(x)\| \leq \epsilon$$

Pour $m = n + 1$, on obtient : $\forall n \geq N \ \forall x \in X \ \|f_{n+1}(x)\| \leq \epsilon$.

Remarque :

Cette propriété est souvent utilisée pour démontrer qu'une série de fonctions n'est pas uniformément convergente.

Définition :

On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ est *normalement convergente* sur X s'il existe une série $\sum_{n\geq 0} \alpha_n$ de $\mathbb{R}^+$, convergente, telle que pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout x de X, $|f_n(x)| \leq \alpha_n$.
Cela revient à dire que la série numérique $\sum_{n\geq 0} \sup\{|f_n(x)| \ / \ x \in X\}$ est convergente.

Proposition :

Si une série de fonctions est normalement convergente, alors elle est uniformément convergente et elle est absolument convergente. En particulier, elle est simplement convergente.

Preuve :

Montrons dans un premier temps que la convergence normale implique la convergence uniforme. Supposons donc que $(f_n)_n$ converge normalement sur X. Il existe une série $\sum_{n\geq 0} \lambda_n$ convergente avec $\lambda_n \in \mathbb{R}^+$ et $\|f_n(x)\| \leq \lambda_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\forall x \in X$; $\| \sum_{k=0}^{n+p} f_k(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\| \leq \| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|f_k(x)\| \leq \sum_{k\geq n+1} \|f_k(x)\| \leq \sum_{k\geq n+1} \lambda_n$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ comme reste de la somme d'une série convergente. Par conséquent, la suite satisfait au critère de Cauchy uniforme et est donc uniformément convergente.

Remarque :

La réciproque est fausse.

2 Propriétés de la somme

Proposition :

Soient $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ deux suites de fonctions de I dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient α et β deux éléments de $\mathbb{K}$. Si les séries $\sum_{n\geq 0} f_n$ et $\sum_{n\geq 0} g_n$ sont convergentes simplement (resp. uniformément, resp. normalement) sur I, alors la série de fonctions $\sum_{n\geq 0}(\alpha f_n + \beta g_n)$ est convergente simplement (resp. uniformément,resp. normalement).

Preuve :
Découle directement des propriétés des limites de suites de fonctions.

Proposition :

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de X dans E.
On suppose que la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ est uniformément convergente sur tout compact.

- Soit x_0 un point de X. Si les $(f_n)_n$ sont continues en x_0 alors $S = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue en x_0.
- En particulier : si les f_n sont continues sur X, la somme $S = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue sur X

Preuve :
Découle directement des propriétés des limites de suites de fonctions.

Remarque :
Les deux propriétés précédentes peuvent parfois être utilisées pour montrer qu'une série de fonctions n'est pas uniformément convergente.

Proposition :

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions d'un intervalle $I = [a; b]$ compact dans E continues sur X On suppose que la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ est uniformément convergente sur tout compact. Alors pour tous a, b de I on a l'égalité :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt$$

Proposition :

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans un corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, de classe C^1, telle que :

- I l existe au moins un x_0 de I tel que la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x_0)$ converge.
- La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f'_n$ est uniformément convergente sur tout compact de I.

Alors on a les résultats suivants :

- la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ est uniformément convergente sur tout compact de I.
- La somme de la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ est de classe C^1 sur I.
- Sur tout intervalle I, on a l'égalité : $(\sum_{n\geq 0}^{+\infty} f_n)' = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} f'_n$.