Rang en algèbre linéaire dans les espaces vectoriels de dimension finie, cours de premier cycle universitaire.

F.Gaudon

2 août 2005

Table des matières

On considère deux espaces vectoriels E et F sur un corps $\mathbb{K}$ de dimensions finies n et m respectivement.

1 Rang d'une famille de vecteurs

Définition :

On appelle rang d'une famille $\{u_1; u_2; \ldots; u_p\}$ de vecteurs de E et on note $rg(\{u_1; u_2; \ldots; u_p\})$, la dimension du sous espace vectoriel engendré par cette famille.

Propriétés :

- $rg(\{u_1; \ldots; u_p\}) \leq p$ avec égalité ssi $\{u_1; \ldots; u_p\}$ est libre.
- $rg(\{u_1; \ldots; u_p\}) \leq n$ avec égalité ssi $\{u_1; \ldots; u_p\}$ est génératrice.

Preuve :

- $\{u_1; \ldots; u_p\}$ est génératrice de $< \{u_1; \ldots; u_p\}$ donc $rg(\{u_1; \ldots; u_p\}) = dim(< \{u_1; \ldots; u_p\} >) \leq p$.
  Si $\{u_1; \ldots; u_p\}$ est libre, c'est une base de $< \{u_1; ldots; u_p\} >$ donc $rg(\{u_1; \ldots; u_p\}) = p$ sinon on peut en extraire une base de $< \{u_1; \ldots; u_p\}$ donc $rg(\{u_1; \ldots; u_p\}) < p$.
- On a clairement $dim(< \{u_1; \ldots; u_p\} >) \leq dim(E)$ donc $rg(< \{u_1; \ldots; u_p\} >) \leq n$. $\{u_1; \ldots; u_p\}$ est génératrice de E ssi $< \{u_1; \ldots; u_p\} >= E$ ssi $rg(< \{u_1; \ldots; u_p\}) = dim(E)$.

Proposition :

Soit f une application linéaire de E dans F. Soit $\{u_1; \ldots; u_p\} \subset E$. Alors $rg(\{f(u_1); f(u_2); \ldots; f(u_p)\}) \leq rg(\{u_1; \ldots; u_p\})$.
En particulier, si f est bijective, l'égalité est vraie.

Preuve :

Soit $\{u_1; \ldots; u_q\}$ avec $q \leq p$ une base de $< \{u_1; \ldots; u_p\} >$, alors $\{f(u_1); \ldots; f(u_q)\}$ est génératrice de $< \{f(u_1); \ldots; f(u_p)\} >$ donc $rg(< f(u_1); \ldots; f(u_p) >) \leq rg(\{u_1; \ldots; u_p\})$ avec égalité ssi $(< \{f(u_1); \ldots; f(u_p)\} >$ est libre, ce qui est le cas si f est bijective puisqu'elle transforme toute famille libre en une famille libre.

2 Rang d'une application linéaire

Définition :

On appelle rang d'une application linéaire f la dimension de Im(f).

Téorème du rang :

Soit f une application linéaire de E dans F. Alors dim(E)=dim(ker(f))+$rg(f)$.

preuve :
Soit $\{u_1; \ldots; u_r\}$ une base de $ker(f)$ que l'on complète en une base $\{u_1; \ldots; u_n\}$ de E.
Alors $\{f(u_1); \ldots; f(u_n)\}$ engendre $Im(f)$ donc $\{f(u_{r+1}); \ldots; f(u_n)\}$ engendre $Im(f)$. En outre, $\{f(u_{r+1}); \ldots; f(u_n)\}$ est libre.
En effet, soit $\lambda_i,\ i \in \{r+1; \ldots; n\}$ tels que $\sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i f(u_i) = 0$. On a $f(\sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i u_i) = 0$ donc $\sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i u_i \in ker(f)$.
D'où $\exists \beta_i \in \mathbb{K},\ \sum_{i=1}^{r} \beta_i u_i = \sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i u_i$.
Si $\exists i \in \{r+1; \ldots; n\}$ / $\lambda_i \neq 0$, on peut supposer qu'il s'agit de λ_{r+1} et on a alors $u_{r+1} = -\lambda_{r+1}^{-1}\lambda_{r+2}u_{r+2} - \ldots - \lambda_{n+1}^{-1}\lambda_n u_n + \sum_{i=1}^{r} \beta_i \lambda_r + 1^{-1} u_i$ ce qui est absurde car la famille $\{u_1; \ldots; u_n\}$ est libre.
Par conséquent, $\{f(u_{r+1}); \ldots; f(u_n)\}$ est une base de $Im(f)$ et le résultat s'en déduit.

Propriété :

- $rg(f) \leq n$ avec égalité ssi f est injective.
- $rg(f) \leq m$ avec égalité ssi f est surjective.
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $rg(\lambda f) = \lambda rg(f)$.

Preuve :
- Conséquence immédiate du théorème précédent.
- $im(f)$ est un sous espace vectoriel de F donc $rg(f) \leq dim(F) = n$. En outre, $rg(f) = n$ ssi $dim(im(f)) = dim(F)$ ssi $Im(f) = F$ ssi f est surjective.

Propriété :

Soient f et g deux endomorphismes de E.
- $|rg(f) - rg(g)| \leq rg(f+g) \leq rg(f) + rg(g)$
- $rg(f \circ g) \leq min(rg(f); rg(g))$. En outre, si g est surjectif alors $rg(f \circ g)) = rg(f)$ et si f est injectif $rg(f \circ g) = rg(g)$.

Preuve :

- Comme $Im(f+g) \subset Im(f) + Im(g)$, on a $rg(f+g) \leq rg(f) + rg(g)$.
  Ecrivant f=(f+g)-g on a alors :
  $rg(f) \leq rg(f+g) + rg(-g) = rg(f+g) + rg(g)$ d'où
  $rg(f) - rg(g) \leq rg(f+g)$ et le résultat en échangeant f et g.
- Si g est surjectif, $g(E) = E$ donc $Im(f \circ g) = Im(f)$ et $rg(f \circ g) = rg(f)$
  Si f est injectif, $Im(g)$ et $f(Im(g))$ sont isomorphes donc $rg(f \circ g) \leq rg(f)$.
  L'inégalité est claire.

3 Rang d'une matrice

Définition :

On appelle rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et on note $rg(A)$, la dimension du sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$engendré par les colonnes de A.
Autrement dit, si $A = (a_{ij})_{ij}$, $C_i = (a_{1i} \;\; a_{2i} \;\; \ldots ; a_{ni})$ est le i-ème vecteur colonne de A et $rg(A) = vect(\{C_1; C_2; \ldots ; C_n\}$.

Théorème :

$rg(A) = rg({}^tA)$, c'est à dire si $L_i = (a_{i1} \;\; a_{i2} \;\; \ldots a_{im})$ est le i-ème vecteur ligne de A, alors $rg(A) = vect(\{L_1; \ldots ; L_m\})$.

Propriété :

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Soient $r \leq min(m; n)$ et $J_r = (\lambda_{ij})_{ij}$ la matrice définie par $\lambda_{ii} = 1$ si $i \in \{1; 2; \ldots ; r\}$ et $\lambda_{ij} = 0$ sinon. Alors il y équivalence entre :

- $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}), \; \exists Q \in GL_n(\mathbb{K}) \; / \; A = PJ_rQ$
- $rg(A) = r$

Propriété :

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Alors $rg(A) = rg(B)$ ssi

$$\exists P \in Gl_n(\mathbb{K}) \; \exists Q \in GL_n\mathbb{K}) \; / \; B = PAQ$$

.

Théorème :

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Si A contient une sous matrice $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ telle que B soit inversible et telle que toute sous matrice de A appartenant à $\mathcal{M}_{r+1}(\mathbb{K})$ et contenant B ne soit pas inversible, alors $rg(A) = r$.