Dimension d'un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie. Rang d'une application linéaire. Cour de premier cycle universitaire.

F.Gaudon

29 juillet 2005

Table des matières

On considère dans ce qui suit un espace vectoriel E sur un corps $\mathbb{K}$.

1 Familles libres, génératrices, bases

1.1 Sous espace vectoriel engendré

Proposition et définition :

Soit A une partie de E. On considère l'ensemble F des combinaisons linéaires d'éléments de A c'est à dire l'ensemble des $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n \ / \ n \in \mathbb{N},\ x_i \in A,\ \lambda_i \in \mathbb{K}$. F est un sous espace vectoriel de E appelé *sous espace vectoriel engendré* par A.

Preuve :
Vérification immédiate.

Proposition :

F est l'intersection de tous les sous espaces vectoriels de E contenant A. C'est donc le plus petit sous espace vectoriel de E contenant la partie A.

Preuve :
Notons d'abord qu'une intersection de sous espaces vectoriels est encore un sous espace vectoriel. F est un espace vectoriel contenant A donc l'intersection des sous espace vectoriels contenant A est contenue dans F. En outre, si un espace vectoriel contient A, il contient toute combinaison linéaire d'éléments de A donc il contient F. Par conséquent, l'intersection des sous espaces vectoriels contenant A contient F. D'où l'égalité.

1.2 Familles génératrices, libres

Définition :

On dit qu'une famille $\{u_i\}_i \in I$ d'éléments de E est *génératrice* si l'espace vectoriel engendré par $\{u_i\}_{i\in I}$ est E.

Définition :

On dit qu'une famille $\{u_i\}_{i\in I}$ d'éléments de E est *libre* ou encore que les vecteurs de cette famille sont *linéairement indépendants* si : pour toute famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{K}^{(I)}$, $\sum_{i\in I}\lambda_i u_i = \vec{0} \Rightarrow \forall i \in I,\ \ \lambda_i = 0$. Dans le cas contraire, c'est à dire s'il existe une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ de scalaires non tous nuls, telle que $\sum_{i\in I}\lambda_i u_i = \vec{0}$, on dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est liée, ou encore que les vecteurs qui la composent sont linéairement dépendants (ou *liés*).

Remarque :
Une famille de vecteurs est liée ssi l'un des vecteurs qui la compose peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.

Preuve :
Si la famille $\{u_i\}_t \in I$ d'éléments de E est liée, il existe une famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$ non tous nuls telle que $\sum_{i\in I}\lambda_i u_i = \vec{0}$. Soit $k \in I$ tel que λ_k soit non nul. On a alors $u_k = \sum_{i\in I-\{k\}}\lambda_i\lambda_k^{-1}u_i$. Réciproquement, Si $u_k = \sum_{i\in I-\{k\}}\beta_i u_i$ avec $\beta_i \in \mathbb{K}$ pour tout $i \in I-\{k\}$ alors on a $u_k - \sum_{i\in I-\{k\}}\beta_i u_i = \vec{0}$ qui montre que la famille $\{u_i\}_{i\in I}$ est liée.

Proposition :

- Toute sous famille d'une famille libre est libre.
- Toute famille contenant les éléments d'une famille génératrice est génératrice.

Preuve :
Vérification immédiate

1.3 base

Définition :

On appelle base de E toute famille libre et génératrice.

Proposition :

La famille $\{u_i\}_{i\in I}$ est une base de E ssi tout vecteur v de E peut s'écrire de manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs u_i.

Preuve :
Si $\{u_i\}_{i\in I}$ est une base de E, alors elle est génératrice donc tout $v \in E$ s'écrit sous la forme $v = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i$ avec $\lambda_i \in I$ pour tout $i \in I$ et les λ_i non tous nuls.
Si $\sum_{i\in I} \beta_i u_i$ est une autre écriture de v alors on a $\sum_{i\in I}(\lambda_i - \beta_i)u_i = \vec{0}$ et puisque la famille est libre, $\forall i \in I,\ \lambda_i - \beta_i = 0$ d'où l'unicité de l'écriture.
Réciproquement, si tout vecteur v s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments de la famille $\{u_i\}_{i\in I}$ alors la famille est génératrice.
En outre, si $\sum_{i\in I} \lambda_i u_i = \vec{0}$, par unicité de l'écriture de $\vec{0}$ sous forme de combinaison linéaire des éléments de $\{u_i\}$, on a $\forall i \in I,\ \lambda_i = 0$.

2 Espaces vectoriels de dimension finie

Définition :

Un espace vectoriel est dit de *dimension finie* s'il admet une famille génératrice finie.

Théorème :

Soit E un espace vectoriel et soit $\{e_1; e_2; \ldots; e_n\}$ une famille de n vecteurs de E.

- Si $\{e_1; e_2; \ldots; e_n\}$ est génératrice de E alors toute famille contenant plus de n vecteurs est liée.
- Si $\{e_1; e_2; \ldots; e_n\}$ est libre, alors aucune famille de moins de n vecteurs n'est génératrice de E.

Preuve :
Soit $p > n$ et $\{w_1; \ldots; w_p\}$ une famille de p vecteurs. La démonstration se fait par récurrence sur n.
Cette propriété est vraie pour $n = 1$ car si $\{w_1; w_2\}$ sont deux vecteurs de l'espace vectoriel engendré par $\{e_1\}$, alors il existe α et β tels que : $w_1 = \alpha e_1$ et $w_2 = \beta e_1$.
Si les deux coefficients sont nuls, alors le système est lié. sinon, on a $\beta w_1 - \alpha w_2 = 0$ et le système est lié.
On suppose la propriété vraie pour $n - 1$ et on la montre pour n. Soit $\{w_1; w_2; \ldots; w_p\}$ un système d'un espace vectoriel engendré par $\{e_1; \ldots; e_n\}$ avec $p > n$.

On a dans le sous espace vectoriel engendré par $\{e_1; e_2; \ldots; e_n\}$:

$$\forall i \in \{1; 2; \ldots; n\},\ w_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k$$

Si tous les a_{1i} sont nuls, alors les w_i appartiennent en fait au sous espace vectoriel engendré par $\{e_2; e_3; \ldots; e_n\}$. D'après l'hypothèse de récurrence, les w_i forment bien un système lié.
Sinon l'un des a_{1i} est non nul, par exemple a_{11}. on annule alors la première composante des autres vecteurs, on obtient alors les vecteurs :

$$w_1 \qquad a_{11}w_2 - a_{12}w_1 \qquad a_{11}w_3 - a_{13}w_1 \qquad \ldots \qquad a_{11}w_{1p} - a_{1p}w_1$$

Les $p-1$ derniers vecteurs sont dans l'espace vectoriel engendré par $\{e_2; \ldots; e_n\}$. Or $p-1 > n-1$ donc l'hypothèse de récurrence s'applique : ils sont liés. Il existe donc λ_i pour $i \in \{2; \ldots; p\}$ tels que :

$$\lambda_2(a_{11}w_2a - a_{12}w_1) + \lambda_3(a_{11}w_3 - a_{13}w_1) + \ldots + \lambda_p(a_{11}w_{1p} - a_{1p}w_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -(\lambda_2 a_{12} + \ldots + \lambda_p a_{1p})w_1 + \lambda_2 a_{11} w_2 + \ldots + \lambda_p a_{11} w_p = 0$$

On obtient une combinaison linéaire nulle des w_i Le coefficient de w_i pour $i \in \{2; \ldots; n\}$ vaut $\lambda_i a_{11}$ et l'on sait que l'un des λ_i est non nul et que a_{11} est non nul donc les coefficients de cette combinaison linéaires sont non tous nuls et par conséquent, le système $\{w_1; w_2; \ldots; w_p\}$ est lié.
Le deuxième point est une conséquence directe du premier puisque si une famille de moins de n vecteurs était génératrice, la famille $\{e_1; \ldots; e_n\}$ ne serait pas libre d'après le premier point.

Théorème de la base incomplète :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie Soit $\{e_1; e_2; \ldots; e_n\}$ une famille génératrice finie de E. Soit $\{u_1; u_2; \ldots; u_p\}$ une famille libre de E, non génératrice. Alors il est possible de compléter la famille $\{u_1; u_2; \ldots; u_p\}$ à l'aide de vecteurs de la famille $\{v_1; v_2; \ldots; v_n\}$ de manière à former une base de E.

Lemme :
Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ non réduit à $\{\vec{0}\}$. Soit X une famille génératrice de M. Soit A une partie de X non vide et libre. Alors il existe une base B telle que $A \subset B \subset X$.

Preuve du lemme :
Considérons toutes les parties de X libres et contenant A. Puisque X est fini, elles sont en nombre fini. Parmi elles, on considère celles qui ont un nombre maximal d'éléments. Soit B l'une d'entre elles. On a donc $B \subset X$, $A \subset B$ et B libre. Notons $B = \{b_1; b_2; \dots; b_n\}$ et montrons que B est génératrice de M. Il suffit de montrer que B est génératrice de X puisque X est génératrice de M. Soit donc $x \in X$. Ou bien $x \in B$ et dans ce cas il n'y a rien à montrer ou bien $x \notin B$. Dans ce cas, soit $B' = B \cup \{x\} = \{b_1; \dots; b_n; x\}$. On a $A \subset B' \subset X$, $B \subset B'$ et $B \neq B'$ donc B' n'est pas libre. D'où $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n + \lambda x = \vec{0}$. En particulier $\lambda \neq 0$ sinon $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = \vec{0}$ avec des λ_i non tous nuls ce qui est impossible car $B = \{b_1; \dots; b_n\}$ est libre. Donc $x = -\lambda^{-1}(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n)$ ce qui montre que B est génératrice de X.

Preuve du théorème :
Remarquons d'abord que $n \geq p$ d'après le théorème précédent. $\{e_1; e_2; \dots; e_n\}$ est une famille génératrice donc $u_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{K}$. L'un au moins des λ_i est non nul sinon u_1 serait nul ce qui n'est pas possible car $\{u_1; u_2; \dots; u_p\}$ étant une famille libre, elle ne contient aucun élément nul. Supposons par exemple que $\lambda_1 \neq 0$. Alors $e_1 = -\sum_{i=2}^{n} \lambda_i \lambda_1 e_i + u_1$ et par conséquent $\{u_1; e_2; e_3; \dots; e_n\}$ est génératrice de E. En outre, $u_2 = \sum_{i=2}^{n} \beta_i e_i + \beta_1 u_1$ et l'un au moins des β_i pour $i \in \{2; \dots; n\}$ est non nul sinon on aurait $u_2 = \beta_1 u_1$ ce qui serait contraire à l'hypothèse $\{u_1; u_2; \dots; u_p\}$ libre. On peut supposer que β_1 est non nul, alors on en déduit que $\{u_1; u_2; e_3; \dots; e_n\}$ est génératrice de E. Et on réitère le procédé. Comme $p \leq n$, on a finalement E engendré par $\{u_1; u_2; \dots; u_p; e_{p+1}; e_{p+2}; \dots; e_n\}$.

Conséquence :

Tout espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{\vec{0}\}$ possède une base.

Preuve :
En effet, s'il est de dimension finie, il possède une famille génératrice et puisqu'il n'est pas réduit à $\{\vec{0}\}$ il possède un vecteur non nul qui forme donc une famille libre que l'on peut compléter en une base.

Théorème :

Si E est un espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{\vec{0}\}$, toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs.

Preuve :
Soient $\{v_1; v_2; \ldots; v_n\}$ et $\{w_1; w_2; \ldots; w_p\}$ deux bases. Alors $\{v_1; v_2; \ldots; v_n\}$ est génératrice et $\{w_1; w_2; \ldots; w_p\}$ est libre donc $p \leq n$. En outre, $\{v_1; v_2; \ldots; v_n\}$ est libre et $\{w_1; w_2; \ldots; w_p\}$ est génératrice donc $n \leq p$. Par conséquent $n = p$.

Définition :

Le nombre d'éléments que possède une base de E est appelé *dimension*dimension de E et noté dim E. Par convention, dim $\{0\} = -\infty$.

Théorème de la base incomplète :

Soit un espace vectoriel de base $\{v_1; v_2; \ldots; v_n\}$ et soit $\{w_1; w_2; \ldots; w_p\}$ un système libre. Alors il existe $n-p$ vecteurs parmi les v_i tel que le système constitué de ces $n-p$ vecteurs v_i et des w_i forment une de E.

Proposition :

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit X=$\{u_1; u_2; \ldots; u_n\}$ une famille de n éléments de E. Alors $\{u_1; u_2; \ldots; u_n\}$ est une base ssi elle est libre ssi elle est génératrice.

Preuve :
Toute base est évidemment une partie libre et génératrice, il suffit donc de montrer que si X est une partie libre alors c'est une base et que si X est génératrice, alors c'est une base. Si X est une partie libre, comme E est de dimension finie et admet donc une famille génératrice, d'après le théorème de la base incomplète, il existe une base B de E contenant X. Mais comme dim E=n=card(X), B et X ont donc le même nombre d'éléments et $X \subset B$. Par conséquent $B = X$ donc X est une base de E.
Si X est une partie génératrice, X contient un élément non nul x qui forme donc une famille libre $\{x\}$. Par le théorème de la bse incompète, on peut compléter $\{x\}$ en une base B à l'aide de vecteurs de la famille X. On a alors $B \subset X$. Mais card B=card X donc B=X et par conséquent X est une base de E.

Remarque :

- Toute famille de plus de n vecteurs est liée.
- Si une famille a moins de n vecteurs,a lors elle n'est pas génératrice.

– La dimension de E est donc le nombre maximum d'éléments d'une famille libre ou encore le nombre minimum d'éléments d'une famille génératrice.

Proposition :

Soit F un espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors F est de dimension finie et dim $F \leq$dim E. Si dim E =dim F, alors $E = F$.

Preuve :
Soit X une base de E c'est donc une famille génératrice finie de E qui est évidemment génératrice de F, sous espace vectoriel de E donc F est de dimension finie. En outre comme de X on peut extraire une base de F on a dim $F \leq$dim E. Si dim E= dim F, soit X une base de F, c'est donc une partie libre de F donc de E contenant dim E éléments et par conséquent c'est une base de E.

Remarque :

– Sous espace vectoriel de dimension 1 : droite vectorielle
– Sous espace vectoriel de dimension 2 : plan vectoriel
– Sous espace vectoriel de dimension $n - 1$: hyperplan vectoriel

3 Dimension finie et applications linéaires

Proposition :

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, E étant de dimension finie. Alors E et F sont isomorphes ssi F est de dimension finie et dim F=dim E.

Preuve :

Définition :

On appelle *rang d'une application linéaire* f d'un espace vectoriel E dans un autre espace vectoriel F la dimension du sous espace vectoriel Im(f).

Proposition :

- $rg(f) \leq n$ avec égalité ssi f est injective.
- $rg(f) \leq m$ avec égalité ssi f est surjective.
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $rg(\lambda f) = \lambda rg(f)$.

Proposition :

Soient f et g deux endomorphismes de E.
- $|rg(f) - rg(g)| \leq rg(f+g) \leq rg(f) + rg(g)$
- $rg(f \circ g) \leq min(rg(f); rg(g))$. En outre, si g est surjectif alors $rg(f \circ g)) = rg(f)$ et si f est injectif $rg(f \circ g) = rg(g)$.

Théorème du rang :

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, E étant de dimension finie. Soit f une application linéaire de E dans F. Alors $Im(f)$ est un sous espace vectoriel de dimension finie de F et on a : dim E=$rg(f)$+dim(Ker(f)).

Proposition :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de même dimension n et f une application linéaire de E dans F. Alors f est un isomorphisme ssi f est injective ssi f est surjective.