Compléments sur la dérivation, cours, terminale, maths complémentaires

F.Gaudon

26 octobre 2021

Table des matières

1 Fonction dérivée, tangente

Définitions :

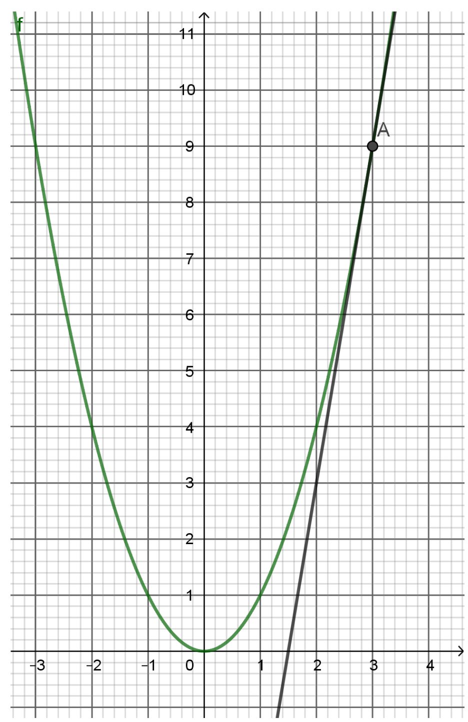
Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a. Dire que f est dérivable en a de nombre dérivé $f'(a)$, signifie que le taux d'accroissement $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers $f'(a)$ quand h tend vers 0. Lorsque f est dérivable en tout réel a de I, f est dite dérivable sur I et $f' : x \mapsto f'(x)$ pour tout $x \in I$ est appelée fonction dérivée de f sur I.

Remarque :
On définit de même la dérivée seconde f'' comme dérivée de f', puis la dérivée troisième $f^{(3)}$ et ainsi de suite.

Propriété :

Dire que f est dérivable en a, signifie que la courbe représentative de f dans un repère admet au point A de coordonnées $(a; f(a))$ une tangente $\mathcal{T}$ de coefficient directeur $f'(a)$.

Exemple [Savoir déterminer l'équation réduite d'une tangente] :
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$.
$f(3) = 9$ et $f'(3) = 6$.
L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3 est donc $y = 6x + p$ où p est un réel à déterminer
Comme $f(3) = 9$ on obtient $9 = 6 \times 3 + p$ donc $p = -9$.
D'où l'équation réduite $y = 6x - 9$.



2 Lien entre la dérivée d'une fonction et son sens de variation

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- Si f est croissante sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0$;
- si f est décroissante sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x) \leq 0$;
- si f est constante sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$.

Propriété :

- Si pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) > 0$) sauf en quelques points où elle s'annule, alors f est croissante (resp. strictement croissante) sur I ;
- si pour tout réel x de I, $f'(x) \leq 0$ (resp. $f'(x) < 0$) sauf en quelques points où elle s'annule, alors f est décroissante (resp. strictement décroissante) sur I ;
- si pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Exemple [Savoir étudier les variations d'une fonction en étudiant le signe de la fonction dérivée] :
Soit f la fonction définie sur $]-\infty; +\infty[$ par $f(x) = 3x^2 + 7x$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 6x + 7$.
$f'(x) \geq 0$ si et seulement si $6x + 7 \geq 0$ c'est à dire $x \geq \frac{-7}{6}$.
On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{7}{6}$		$+\infty$
signe $f'(x)$		-	0	$+$	
variations f		$\searrow$	$\frac{-49}{12}$	$\nearrow$	

3 Dérivation de fonctions

3.1 Fonctions dérivées usuelles (rappel)

$f(x)$	$f'(x)$	$\mathcal{D}_{f'}$
constante k	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$mx + p$	m	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{x^n}$	$-n\frac{1}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

3.2 Opérations sur la dérivation

Propriété :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel. Alors $u+v$, ku, uv sont dérivables sur I, $\frac{u}{v}$ est dérivable pour tout $a \in I$ tel que $v(a) \neq 0$ et :

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(k\,u)' = k\,u'$$

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$(\frac{1}{v})' = -\frac{v'}{v^2}$$

Exemple [Savoir calculer la fonction dérivée d'une fonction] :
Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{4x-3}{x+1}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas et on a :
$f'(x) = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}(x)$ avec $u(x) = 4x-3$, $u'(x) = 4$, $v(x) = x+1$, $v'(x) = 1$.
Donc $f'(x) = \dfrac{4(x+1) - 1(4x-3)}{(x+1)^2} = \dfrac{4x+4-4x+3}{(x+1)^2} = \dfrac{7}{(x+1)^2}$

3.3 Dérivation de fonctions composées

Propriété :

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- La fonction u^2 définie par $x \mapsto u(x)^2$ est dérivable sur I et :

  $$(u^2)' = 2u'u$$

  c'est à dire que sa fonction dérivée est définie par $x \mapsto 2u'(x)u(x)$.
- La fonction e^u définie par $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I est :

  $$(e^u)' = u'e^u$$

  c'est à dire $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$.

Preuve :

- $u^2 = u \times u$ donc $(u^2)' = u'u + uu'$ d'après la formule de dérivation de produit. Donc $(u^2)' = 2u'u$
- Admise.

Exemple :
Soit g la fonction définie sur $\mathcal{R}$ par $g(x) = (5x^4 + 7)^2$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = u(x)^2$ avec $u(x) = 5x^4 + 7$.
Donc $u'(x) = 5 \times 4x^3 + 0 = 20x^3$
et $g'(x) = 2u'(x)u(x)^2 = 2 \times 20x^3 \times (5x^4 + 7) = 40x^3(5x^4 + 7)$

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Soient a et b deux réels et J l'ensemble des réels x tels que $ax + b \in I$. Alors la fonction $g : x \longmapsto f(ax + b)$ est dérivable sur J et pour tout x réel de J,

$$g'(x) = af'(ax + b)$$

En particulier,

$$((ax + b)^n)' = a \times n(ax + b)^{n-1}$$

$$(\sqrt{ax + b})' = \frac{a}{2\sqrt{ax + b}}$$

Preuve :
admise

Exemple :

- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (4x - 5)^2$. g est dérivable sur $\mathcal{R}$ et :
$g'(x) = 2 \times 4 \times (4x - 5) = 8(4x - 5) = 3x - 40$.
- Soit h la fonction définie sur $I =]\frac{-1}{3}; +\infty[$ par $h(x) = 5\sqrt{3x + 1}$. h est dérivable sur I et :
$h'(x) = 5 \times \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} = \frac{15}{2\sqrt{3x+1}}$.

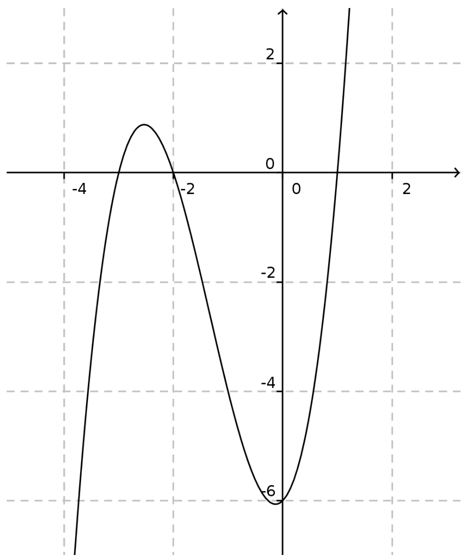
4 Notion intuitive de continuité

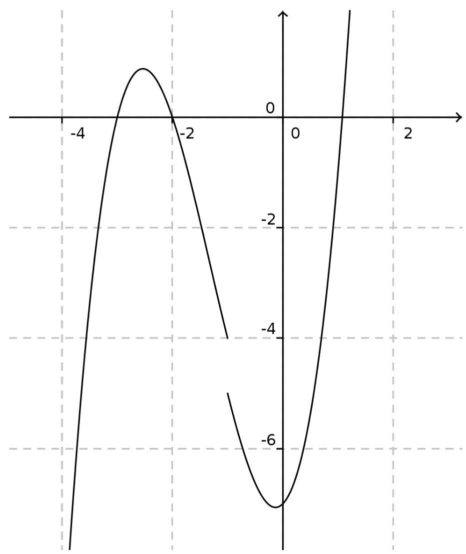
Définition intuitive :

> Une fonction f définie sur un intervalle I est continue sur I si sa courbe représentative ne présente aucune rupture.

Exemple :

Ci-dessous la fonction f, définie par $f(x) = (x+2)(x-1)(x+3)$ sur $\mathbb{R}$, est continue sur $]-\infty;+\infty[$ alors que la fonction g définie sur $]-\infty;-1]$ par $g(x) = f(x)$ et sur $]-1;+\infty[$ par $g(x) = f(x) - 1$ n'est pas continue en -1.



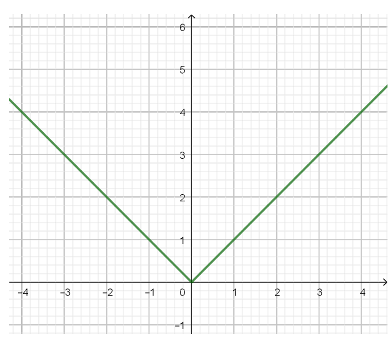


Propriétés (admises) :

> - Les fonctions affines, polynômes, racine carrée, exponentielle et valeur absolue sont continues sur leur ensemble de définition. La fonction inverse est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.
> - Si une fonction est dérivable sur un intervalle I, alors elle est continue sur cet intervalle.

Remarque :

La réciproque n'est pas vraie : la fonction valeur absolue est continue sur $]-\infty;+\infty[$ mais n'est pas dérivable en 0.



Convention :

Une flèche dans le tableau de variations d'une fonction f indique :
- la stricte croissance ou stricte décroissance de f sur l'intervalle correspondant ;
- la continuité de la fonction f sur cet intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires (admis) :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe *au moins* un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

conséquence, corollaire du théorème des valeurs intermédiaires : :

Si de plus f est *strictement monotone* sur I, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un *unique* réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

x	a		c		b
					$f(b)$
				$\nearrow$	
f			k		
		$\nearrow$			
	$f(a)$				

x	a		c		b
	$f(a)$				
		$\searrow$			
f			k		
				$\searrow$	
					$f(b)$

Exemple [Savoir utiliser le théorème des valeurs intermédiaires] :
Montrons que l'équation $x^3 = 0,5$ admet une unique solution sur $[0;1]$. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3$ sur $[0;1]$.
- f est dérivable donc continue sur $[0;1]$;
- $f'(x) = 3x^2$ donc $f'(x) > 0$ pour tout réel x de $[0;1]$ donc f est strictement croissante sur $[0;1]$;
- $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0,5$ admet une unique solution sur $[0;1]$.