Compléments sur la dérivation, cours, terminale, mathématiques complémentaires

1 Fonction dérivée, tangente

Définitions :

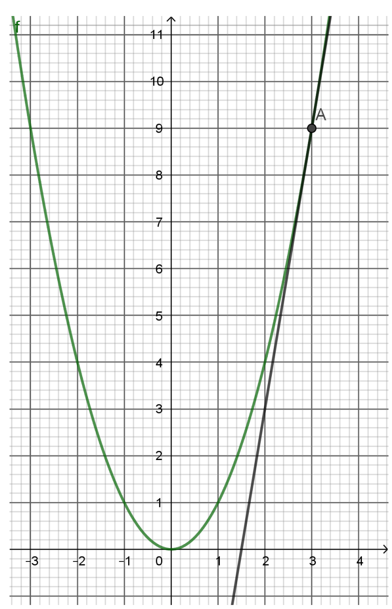
Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a. Dire que f est dérivable en a de nombre dérivé $f'(a)$, signifie que le taux d'accroissement .... tend vers $f'(a)$ quand h tend vers 0. Lorsque f est dérivable en tout réel a de I, f est dite dérivable sur I et $f' : x \mapsto f'(x)$ pour tout $x \in I$ est appelée fonction dérivée de f sur I.

Remarque :
On définit de même la dérivée seconde f'' comme dérivée de f', puis la dérivée troisième $f^{(3)}$ et ainsi de suite.

Propriété :

Dire que f est dérivable en a, signifie que la courbe représentative de f dans un repère admet au point A de coordonnées $(a; f(a))$ une tangente $\mathcal{T}$ de coefficient directeur $f'(a)$.

Exemple [Savoir déterminer l'équation réduite d'une tangente] :
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) =$............ .
$f(3) =$............. et $f'(3) =$.......... .
L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3 est donc .... avec p réel.
Comme $f(3) =$ .... on a donc ....
donc ....
D'où l'équation réduite ....



2 Lien entre variations d'une fonction et signe de sa fonction dérivée

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f est croissante sur I, alors pour tout réel x de I, ... ;
- si f est décroissante sur I, alors pour tout réel x de I, ... ;
- si f est constante sur I, alors pour tout réel x de I, ...

Propriété :

- Si pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) > 0$) sauf en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est .... (resp. strictement ....) sur I ;
- si pour tout réel x de I, $f'(x) \leq 0$ (resp. $f'(x) < 0$) sauf en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est .... (resp. strictement ....) sur I ;
- si pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$, alors f est .... sur I.

Exemple [Savoir étudier les variations d'une fonction en étudiant le signe de la fonction dérivée] :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;+\infty[$ par $f(x) = 3x^2 + 7x$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) =$ ....
$f'(x) \geq 0$ si et seulement si .... c'est à dire ....
On a donc le tableau de variations suivant :

x	....
signe $f'(x)$	....
variations f	

3 Dérivation de fonctions

3.1 Dérivées de fonctions usuelles

$f(x)$	expression de $f'(x)$	ensemble de dérivabilité $\mathcal{D}_{f'}$
constante k	....	$\mathbb{R}$
x	....	$\mathbb{R}$
$mx+p$	....	$\mathbb{R}$
x^2	.....	$\mathbb{R}$
x^n	......	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	....	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	....	$]0;+\infty[$
$\frac{1}{x^n}$	$-n\frac{1}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
e^x	.....	$\mathbb{R}$

3.2 Opérations sur la dérivation

Propriété :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel. Alors $u+v$, ku, uv sont dérivables sur I, $\frac{u}{v}$ est dérivable pour tout $a \in I$ tel que $v(a) \neq 0$ et :

$$(u+v)' = ...$$

$$(ku)' = ...$$

$$(uv)' = ...$$

$$(\frac{u}{v})' = ...$$

$$(\frac{1}{v})' = ...$$

Exemple [Savoir calculer la fonction dérivée d'une fonction] :

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \frac{4x-3}{x+1}$.
f est dérivable sur $]-1;+\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et on a :

$f'(x) =$...........
avec $u(x) = 4x - 3$, $u'(x) =$..........., $v(x) = x + 1$, $v'(x) =$..............
Donc $f'(x) =$................... ....

4 Dérivation de fonctions composées

Propriété :

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- La fonction u^2 définie par $x \mapsto u(x)^2$ est dérivable sur I et :

  ....

- La fonction e^u définie par $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I est :

  ....

Exemple [savoir calculer la fonction dérivée d'une fonction composée] :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (5x^4 + 7)^2$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = u(x)^2$ avec $u(x) =$ ....
Donc $u'(x) =$ .....
et $g'(x) =$ .....
....

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Soient a et b deux réels et J l'ensemble des réels x tels que $ax + b \in I$. Alors la fonction $g : x \longmapsto f(ax + b)$ est dérivable sur J et pour tout x réel de J,

....

En particulier,

....

Exemples [savoir calculer la fonction dérivée d'une fonction composée :

- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (4x - 5)^2$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
  $g'(x) =$ ....

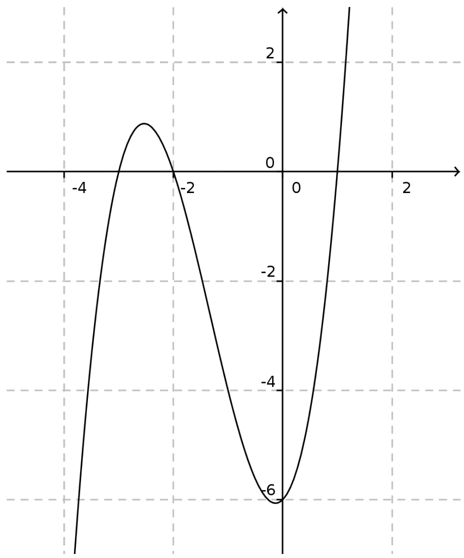
- Soit h la fonction définie sur $I =]\frac{-1}{3}; +\infty[$ par $h(x) = 5\sqrt{3x + 1}$. h est dérivable sur I et :
  $h'(x) =$ ....

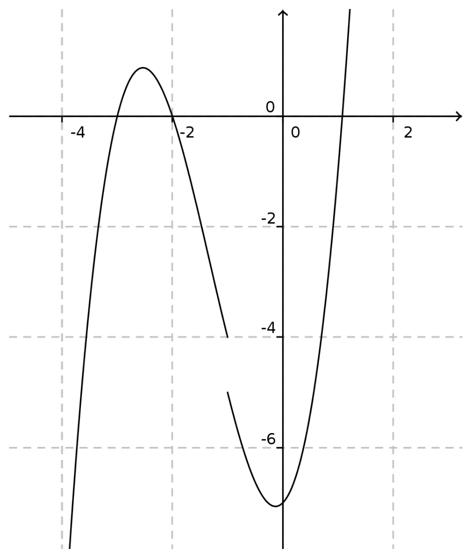
5 Notion intuitive de continuité

Définition intuitive :

> Une fonction f définie sur un intervalle I est continue sur I si ....

Exemple :
Ci-dessous la fonction f, définie par $f(x) = (x+2)(x-1)(x+3)$ sur $\mathbb{R}$, est continue sur $]-\infty; +\infty[$.
La fonction g définie sur $]-\infty; -1]$ par $g(x) = f(x)$ et sur $]-1; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - 1$ n'est pas continue en ..... .

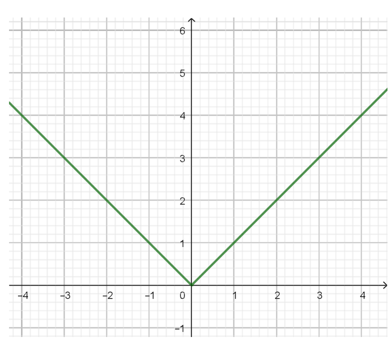




Propriétés (admises) :

> - Les fonctions affines, polynômes, racine carrée, exponentielle et valeur absolue sont continues sur leur ensemble de définition. La fonction inverse est continue sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$
> - Si une fonction est .... sur un intervalle I, alors elle est continue sur cet intervalle.

Remarque :
La réciproque n'est pas vraie : la fonction valeur absolue, de représentation graphique ci-contre, est continue sur $]-\infty; +\infty[$ mais n'est pas dérivable en 0.



Convention :

Une flèche dans le tableau de variations d'une fonction f indique :
- la stricte croissance ou stricte décroissance de f sur l'intervalle correspondant ;
- la continuité de la fonction f sur cet intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires (admis) :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, ...
....

Conséquence, corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

Si de plus f est *strictement monotone* sur I, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, ...
....

x	a		c		b
					$f(b)$
				$\nearrow$	
f			k		
		$\nearrow$			
	$f(a)$				

x	a		c		b
	$f(a)$				
		$\searrow$			
f			k		
				$\searrow$	
					$f(b)$

Exemple [Savoir utiliser le théorème des valeurs intermédiaires] :

Montrons que l'équation $x^3 = 0,5$ admet une unique solution sur $[0;1]$. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3$ sur $[0;1]$.
- f est .... donc continue sur $[0;1]$;
- $f'(x) =$............... donc $f'(x)$ est de signe .... pour tout réel x de $[0;1]$ donc f est .... sur $[0;1]$;
- $f(0) =$...... et $f(1) =$......... .

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0,5$ admet une unique solution sur $[0;1]$.