Suites numériques particulières, rappels de première

1 Suites arithmétiques

Définition :

Soit r un nombre réel. On appelle *suite arithmétique* de *raison* r toute suite définie par son premier terme et pour tout entier naturel n par la relation :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Propriété (expression en fonction de n) :

Si $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de raison r, alors :

- si le premier terme est u_0, alors pour tout entier n, $u_n = u_0 + nr$;
- si le premier terme est u_1, alors pour tout entier n, $u_n = u_1 + (n-1)r$.

De manière plus générale, pour tous les entiers naturels n et p avec $p < n$ on a :

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

Propriété :

Pour tout entier naturel n,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Propriété :

Pour toute suite *arithmétique* $(u_n)_n$ et tout entier naturel n :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

ou pour tout entier naturel $p < n$,

$$u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2}$$

ce qui s'écrit encore :

$$u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = \frac{\text{nombre de termes} \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

2 Suites géométriques

Définition :

Soit q un réel. On appelle suite *géométrique* de *raison* q toute suite définie par son premier terme u_0 (ou u_1) et telle que pour tout entier naturel $n \geq 0$ (ou $n \geq 1$) :

$$u_{n+1} = qu_n$$

Propriété (expression en fonction de n) :

Si $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison q et de premier :

- u_0, alors $u_n = q^n u_0$;
- u_1, alors $u_n = q^{n-1} u_1$.

De manière plus générale, si p et n sont des entiers naturels tels que $p < n$, on a :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Propriété :

Pour tout réel $q \neq 1$ on a :

$$1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Propriété :

Si $(u_n)_n$ est une suite *géométrique* de raison q et de premier terme u_0, alors :

- si $q \neq 1$,

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{u_0(1 - q^{n+1})}{1 - q}$$

ou

$$u_p + u_{p+1} + ... + u_n = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

- si $q = 1$, $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n + 1)u_0$.