

Sens de variations de suites, cours, rappels de la classe de première

Définition :

- Une suite (u_n) est *croissante* à partir d'un rang $p \in \mathbb{N}$ si pour tout entier $n \geq p$, $u_{n+1} - u_n > 0$.
- Une suite (u_n) est *décroissante* à partir d'un rang $p \in \mathbb{N}$ si pour tout entier $n \geq p$, $u_{n+1} - u_n < 0$.

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^2 - n$. Étude du sens de variation de (u_n) :
 Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - (n+1) - (n^2 - n) = n^2 + 2n + 1^2 - n - 1 - n^2 + n = 2n$
 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2n \geq 0$ donc (u_n) est une suite croissante.

Propriété :

Soit (u_n) une suite définie à partir d'un certain rang $p \in \mathbb{N}$. Si pour tout entier naturel $n \geq p$, u_n est strictement positif, alors :

- si pour tout entier naturel $n \geq p$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors la suite (u_n) est croissante à partir du rang p ;
- si pour tout entier naturel $n \geq p$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors la suite (u_n) est décroissante à partir du rang p .

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{3^{n+2}}{7^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 On a $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3^{n+3}}{7^{n+1}}}{\frac{3^{n+2}}{7^n}} = \frac{3^{n+3}}{7^{n+1}} \times \frac{7^n}{3^{n+2}} = \frac{3}{7} < 1 \text{ donc la suite } (u_n) \text{ est strictement décroissante.}$$

Propriété :

Soit (u_n) une suite définie à partir d'un rang $p \in \mathbb{N}$. Si f est une fonction définie sur $[p; +\infty[$ telle que pour tout entier naturel n , $u_n = f(n)$, alors

- si f est décroissante sur $[p; +\infty[$, la suite (u_n) est décroissante à partir du rang p ;
- si f est croissante sur $[p; +\infty[$, la suite (u_n) est croissante à partir du rang p .

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout entier naturel non nul n . Alors $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{1}{x}$.
 On sait que f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ donc (u_n) est aussi strictement décroissante.