

# Limites de suites, cours, terminale, spécialité mathématiques

## 1 Convergence de suites

**Définition :**

Soit  $(u_n)$  une suite.  
 On dit que  $(u_n)$  *converge vers un réel  $l$  ou a pour limite  $l$*  lorsque tout intervalle ouvert  $A$  contenant  $l$ , contient tous les termes de la suite  $(u_n)$  à partir d'un certain rang  $N$  c'est à dire que pour tout  $n \geq N$ ,  $u_n \in A$ .  
 On dit alors que la suite est convergente et que  $l$  est sa limite. On note .....

**Propriété :**

Si  $(u_n)$  converge vers une limite  $l$ , alors celle-ci est .....

**Preuve :**

En effet, supposons que  $(u_n)$  converge vers une limite  $l$  et soit  $l'$  un réel différent de  $l$ . On supposera ici que  $l' < l$ , le cas  $l' > l$  se traitant de la même manière. Il existe donc un nombre réel  $e$  positif tel que  $l' + e < l - e$ . Comme  $(u_n)$  converge vers  $l$ , à partir d'un certain rang  $N$ , tous les termes de la suite sont dans l'intervalle  $]l - e; l + e[$  et par conséquent les termes de la suite suivant ce rang n'appartiennent pas à l'intervalle  $]l' - e; l' + e[$ , qui est un intervalle ouvert contenant  $l'$ . On a trouvé un intervalle ouvert tel que pour n'importe quel rang les termes suivants  $N$  ne sont pas tous dans l'intervalle ce qui montre que la suite ne converge pas vers  $l'$ .

## 2 Convergence de suites de référence

**Propriété (limites finies de suites de référence) :**

Les suites  $(\frac{1}{n})$ ,  $(\frac{1}{\sqrt{n}})$  et  $(\frac{1}{n^p})$  où  $p$  est un entier naturel non nul sont convergentes et on a :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \dots$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \dots$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = \dots$

**Preuve :**

- On considère un intervalle ouvert contenant 0. soit  $a$  un réel positif strictement de cet intervalle. Alors il existe un nombre entier  $N$  tel que  $\frac{1}{N} < a$ . Comme  $(\frac{1}{n})$  est décroissante, pour tout rang  $n > N$ , on a  $\frac{1}{n} < a$  donc  $\frac{1}{n}$  qui appartient à l'intervalle. Par conséquent, la suite converge vers 0.
- On considère un intervalle ouvert contenant 0. Soit  $a$  un réel positif strictement de cet intervalle. On cherche un entier  $N$  tel que  $\frac{1}{\sqrt{N}} \leq a$  ce qui équivaut à  $\sqrt{N} \geq \frac{1}{a}$  donc à  $N \geq \frac{1}{a^2}$ . Soit donc  $N$  tel que  $N \geq \frac{1}{a^2}$ , le calcul précédent montre que  $\frac{1}{\sqrt{N}} \leq a$  et, la suite  $(\frac{1}{\sqrt{n}})$  étant décroissante, pour tout  $n \geq N$ ,  $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq a$ . Ceci prouve que la suite a pour limite 0.
- Démarche identique aux précédentes.



### 3 Divergence de suites

Définition :

- On dit qu'une suite est *divergente* si .....
- On dit que la suite  $(u_n)$  *diverge vers*  $+\infty$  ou *a pour limite*  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) lorsque tout intervalle de la forme  $]a; +\infty[$  où  $a$  est un réel (resp.  $] -\infty; a]$ ), contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \dots$  (resp.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \dots$ )

Remarque :

Une suite peut être divergente et ne pas admettre de limite, par exemple .....

Propriété (limites infinies de suites de référence) :

- On a :
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = \dots$  ;
  - $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = \dots$  ;
  - $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = \dots$  avec  $p$  entier naturel non nul ;
  - Pour tous les réels  $m$  et  $p$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} mx + p = \dots$  ;

Preuve :

- Pour tout intervalle  $]a; +\infty[$ , soit  $N$  entier naturel tel que  $N > a$ , alors pour tout rang  $n$  tel que  $n \geq N$ ,  $n$  est dans l'intervalle  $]a; +\infty[$  donc la suite diverge vers  $+\infty$ .
- Pour tout intervalle  $]a; +\infty[$ , On cherche  $N$  entier naturel tel que  $\sqrt{N} > a$  c'est à dire  $N > a^2$ . Soit donc  $N$  tel que  $N > a^2$ . Alors  $\sqrt{N} > a$  et pour tout rang  $n \leq N$ , on a  $\sqrt{n} > a$  donc la suite  $(\sqrt{n})$  est divergente vers  $+\infty$ .
- Même démarche.

### 4 Opérations sur les limites de suites

Propriété :

- Soit  $(u_n)$  une suite.
- si  $k$  est un réel et si  $(u_n)$  converge vers un réel  $l$ , alors la suite  $(ku_n)$  est convergente vers .....
  - si  $k$  est un réel et  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) alors  $ku_n$  diverge vers ..... (resp .....);



**Preuve :**

- Soit  $A$  un intervalle ouvert contenant  $kl$ . Il existe donc un réel  $a > 0$  tel que  $]kl - a; kl + a[$  est inclus dans  $A$ . Comme  $(u_n)$  est convergente vers  $l$ , il existe un rang  $N$  tel que pour tout rang  $n \geq N$ ,  $u_n \in ]l - \frac{a}{k}; l + \frac{a}{k}[$  qui est un intervalle ouvert contenant  $kl$ . D'où pour tout  $n \geq N$ ,  $ku_n \in ]kl - a; kl + a[$  ce qui assure que la suite converge vers  $kl$ .
- Soit  $a > 0$  un réel. Alors, puisque  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ , il existe un rang  $N$  tel que pour tous les rangs  $n \geq N$ ,  $u_n > \frac{a}{k}$ . D'où pour tout  $n \geq N$ ,  $ku_n > a$ .

**Propriété :**

$\lim u_n$	$l$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$l$	$l$
$\lim v_n$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim u_n + v_n$	.....	.....	.....	.....	.....	.....
$\lim u_n \times v_n$	.....	.....	.....	.....	.....	.....
$\lim \frac{u_n}{v_n}$	si $l' \neq 0$ , .....	.....	.....	.....	.....	.....

**Preuves :**

Admises

**Exemples :**

- Soit  $v_n$  définie par  $v_n = 5n^2 - 6n$  pour tout  $n \geq 0$ . On a alors  $v_n = n(5n - 6)$ . Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = \dots\dots\dots$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5n - 6 = \dots\dots\dots$  donc  $(v_n) \dots\dots\dots$  vers  $\dots\dots\dots$
- Soit  $u_n$  définie par  $u_n = \frac{3n^4+n}{n^3+1}$  pour tout  $n \geq 1$ . On a alors  $u_n = \frac{n^4(3+\frac{1}{n^3})}{n^3(1+\frac{1}{n^3})} = \frac{n(3+\frac{1}{n^3})}{1+\frac{1}{n^3}}$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$  on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + \frac{1}{n^3} = 3$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n^3} = 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  par produit et quotient c'est à dire que la suite  $(u_n) \dots\dots\dots$  donc vers  $\dots\dots\dots$

## 5 Inégalités et limites de suites

**Propriété (théorème de .....):**

- Soit  $(u_n)$  une suite divergente vers  $+\infty$  et  $(v_n)$  une suite telle qu'à partir d'un certain rang  $v_n \geq u_n$ . Alors  $(v_n)$  est ..... vers .....
- Soit  $(u_n)$  une suite divergente vers  $-\infty$  et  $(v_n)$  une suite telle qu'à partir d'un certain rang  $v_n \leq u_n$ . Alors  $(v_n) \dots\dots\dots$  vers  $\dots\dots\dots$

**Preuve :**

On considère un intervalle de la forme  $]a; +\infty[$  où  $a$  est un réel.  $(u_n) \dots\dots\dots$  vers  $\dots\dots\dots$  donc à partir d'un certain rang  $N$  les termes de la suite  $(u_n)$  sont dans l'intervalle  $\dots\dots\dots$ . A partir d'un certain rang  $N'$ , ..... donc à partir du plus grand des rang  $N$  et  $N'$ , les termes de la suite  $(v_n)$  sont dans  $\dots\dots\dots$  ce qui démontre que la suite  $(v_n)$  est divergente vers  $+\infty$ .

**Théorème (dit « théorème des gendarmes ») :**

Soient  $u, v$  et  $w$  des suites avec  $v$  et  $w$  convergentes vers une même limite  $l$ . Si, à partir d'un certain rang,  $v_n \leq u_n \leq w_n$ , alors la suite  $u$  est .....

**Preuve :**

On considère un intervalle ouvert contenant  $l$ . Il existe donc un nombre réel  $e$  strictement positif tel que  $]l - e; l + e[$  est inclus dans cet intervalle. La suite  $(v_n)$  converge vers  $l$  donc à partir d'un certain rang  $N$ ,  $v_n$  est supérieur à  $l - e$ . La suite  $(w_n)$  est convergente donc à partir d'un certain rang  $N'$ ,  $w_n < l + e$ . En outre, à partir d'un certain rang  $N''$ , on a  $v_n \leq u_n \leq w_n$ , donc à partir du plus grand des trois rangs  $N, N'$  et  $N''$ , on a  $u_n \leq v_n > l - e$  et  $u_n \geq w_n < l + e$  donc  $u_n$  est dans l'intervalle considéré. Ceci montre que la suite converge vers  $l$ .

**Théorème :**

Soit  $(u_n)$  une suite croissante et convergente vers un réel  $l$ . Alors tous les termes de la suite  $(u_n)$  sont .....

**Preuve :**

Démontrons ce résultat par l'absurde. Pour cela, on suppose qu'il existe un terme de la suite, appelons le  $(u_N)$ , qui est supérieur strictement à  $l$ . Soit  $d = u_N - l$ . On a donc  $d > 0$ . On considère l'intervalle  $]l - d; l + d[$ .  $u_N$  n'appartient donc pas à cet intervalle.  $(u_n)$  étant une suite croissante, pour tout entier naturel  $n \geq N$ ,  $u_n > u_N > l + d$  et donc  $u_n \notin ]l - d; l + d[$ . On vient donc de trouver un intervalle pour lequel quelque soit le rang  $p$  choisi, il existe des termes de la suite plus grand que  $p$  (les termes de rang  $n$  supérieur au maximum de  $p$  et  $N$ ) qui n'appartiennent pas à cet intervalle : cela contredit la définition de la convergence de la suite vers  $l$ . Cette contradiction montre que la supposition faite au départ est absurde, on ne peut donc pas trouver de terme de la suite qui soit supérieur strictement à  $l$ . D'où le résultat.

## 6 Convergence des suites monotones

**Théorème (théorème de la limite monotone) :**

Toute suite monotone et bornée est .....

**Preuve :**

Admise

**conséquence :**

Soit  $(u_n)$  une suite croissante.

- Si  $(u_n)$  n'est pas majorée alors elle est .....
- Si  $(u_n)$  est majorée, alors elle est .....

**Preuve :**

- Soit  $(u_n)$  une suite croissante et non majorée. Soit  $M$  un réel. Il s'agit de montrer qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle  $]M; +\infty[$ .  
La suite n'est pas majorée par  $M$  donc il existe un rang  $N$  tel que  $u_N$  soit supérieure strictement à  $M$ , c'est à dire  $u_N \in ]M; +\infty[$ . Puisque la suite est croissante, pour tout  $n \geq N$ ,  $u_n \geq u_N > M$  donc  $u_n \in ]M; +\infty[$ .  
Cela signifie que la suite admet pour limite  $+\infty$ .
- Application du théorème précédent.

## 7 Limites de suites géométriques

**Propriété (limite des suites géométriques) :**

Soit  $q$  un réel. Alors :

- Si ....., alors la suite  $(q^n)$  a pour limite .....
- si ....., alors la suite  $(q^n)$  a pour limite .....
- si ....., alors la suite  $(q^n)$  .....

**Preuve :**

- Si  $q > 1$  alors  $q = 1 + x$  avec  $x > 0$ . Considérons la fonction  $h$  définie par  $h(x) = \dots$ .  
La fonction  $h$  est définie et dérivable sur  $[0; +\infty[$  et  $h'(x) = \dots$ .  
Pour tout  $x \geq 0$ , on a  $h'(x) \geq \dots$  donc  $h$  est ..... et de  $h(0) = \dots$  on déduit donc  $(1+x)^n \geq 1 + nx$ .  
Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + nx) = +\infty$ , on a donc  $q^n = (1+x)^n$  qui tend vers  $+\infty$ .
- Si  $-1 < q < 1$ , alors  $|q| < 1$  donc  $\frac{1}{|q|} > 1$  et d'après le cas précédent  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{|q|^n} = \dots$  d'où  $(|q|^n)$  tend vers .....  
Par suite,  $|q|^n = q^n$  si  $q > 0$  ou si  $n$  est pair et  $|q|^n = -q^n$  sinon, d'où  $-|q|^n \leq q^n \leq |q|^n$  et par le théorème des gendarmes  $(q^n)$  tend vers 0.
- Si  $q = -1$ , la suite des termes impaires est dans ].....[ et la suite des termes paires est dans ].....[ donc la suite  $(q^n)$  ne peut pas converger.

