Limites de suites, cours, terminale, spécialité mathématiques

1 Convergence de suites

Définition :

Soit (u_n) une suite.
On dit que (u_n) *converge vers un réel* l ou *a pour limite* l lorsque tout intervalle ouvert A contenant l, contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang N c'est à dire que pour tout $n \geq N$, $u_n \in A$.
On dit alors que la suite est convergente et que l est sa limite. On note ....

Propriété :

Si (u_n) converge vers une limite l, alors celle-ci est ....

Preuve :
En effet, supposons que (u_n) converge vers une limite l et soit l' un réel différent de l. On supposera ici que $l' < l$, le cas $l' > l$ se traitant de la même manière. Il existe donc un nombre réel e positif tel que $l' + e < l - e$. Comme (u_n) converge vers l, à partir d'un certain rang N, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]l - e; l + e[$ et par conséquent les termes de la suite suivant ce rang n'appartiennent pas à l'intervalle $]l' - e; l' + e[$, qui est un intervalle ouvert contenant l'. On a trouvé un intervalle ouvert tel que pour n'importe quel rang les termes suivants N ne sont pas tous dans l'intervalle ce qui montre que la suite ne converge pas vers l'.

2 Convergence de suites de référence

Propriété (limites finies de suites de référence) :

Les suites $(\frac{1}{n})$, $\frac{1}{\sqrt{n}})$ et $\frac{1}{n^p}$ où p est un entier naturel non nul sont convergentes et on a :

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = ...$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = ...$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = ...$

Preuve :

- On considère un intervalle ouvert contenant 0. soit a un réel positif strictement de cet intervalle. Alors il existe un nombre entier N tel que $\frac{1}{N} < a$. Comme $(\frac{1}{n})$ est décroissante, pour tout rang $n > N$, on a $\frac{1}{n} < a$ donc $\frac{1}{n}$ qui appartient à l'intervalle. Par conséquent, la suite converge vers 0.
- On considère un intervalle ouvert contenant 0. Soit a un réel positif strictement de cet intervalle. On cherche un entier N tel que $\frac{1}{\sqrt{N}} \leq a$ ce qui équivaut à $\sqrt{N} \geq \frac{1}{a}$ donc à $N \geq \frac{1}{a^2}$. Soit donc N tel que $N \geq \frac{1}{a^2}$, le calcul précédent montre que $\frac{1}{\sqrt{N}} \leq a$ et, la suite $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ étant décroissante, pour tout $n \geq N$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq a$. Ceci prouve que la suite a pour limite 0.
- Démarche identique aux précédentes.

3 Divergence de suites

Définition :

- On dit qu'une suite est *divergente* si ....
- On dit que la suite (u_n) *diverge vers* $+\infty$ ou *a pour limite* $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque tout intervalle de la forme $[a;+\infty[$ où a est un réel (resp. $]-\infty;a]$), contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note $\lim_{n\to+\infty} u_n =$ .... (resp. $\lim_{n\to+\infty} u_n =$ ....)

Remarque :
Une suite peut être divergente et ne pas admettre de limite, par exemple ....

Propriété (limites infinies de suites de référence) :

On a :
- $\lim_{n\to+\infty} n =$ .... ;
- $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} =$ .... ;
- $\lim_{n\to+\infty} n^p =$ .... avec p entier naturel non nul ;
- Pour tous les réels m et p, $\lim_{n\to+\infty} mx+p =$ .... ;

Preuve :
- Pour tout intervalle $]a;+\infty[$, soit N entier naturel tel que $N>a$, alors pour tout rang n tel que $n\geq N$, n est dans l'intervalle $]a;+\infty[$ donc la suite diverge vers $+\infty$.
- Pour tout intervalle $]a;+\infty[$, On cherche N entier naturel tel que $\sqrt{N}>a$ c'est à dire $N>a^2$. Soit donc N tel que $N>a^2$. Alors $\sqrt{N}>a$ et pour tout rang $n\leq N$, on a $\sqrt{n}>a$ donc la suite $(\sqrt{n})$ est divergente vers $+\infty$.
- Même démarche.

4 Opérations sur les limites de suites

Propriété :

Soit (u_n) une suite.
- si k est un réel et si (u_n) converge vers un réel l, alors la suite (ku_n) est convergente vers .... ;
- si k est un réel et (u_n) diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) alors ku_n diverge vers .... (resp ....) ;

Preuve :

- Soit A un intervalle ouvert contenant kl. Il existe donc un réel $a > 0$ tel que $]kl - a; kl + a[$ est inclus dans A. Comme (u_n) est convergente vers l, il existe un rang N tel que pour tout rang $n \geq N$, $u_n \in]l - \frac{a}{k}; l + \frac{a}{k}[$ qui est un intervalle ouvert contenant kl. D'où pour tout $n \geq N$, $ku_n \in]kl - a; kl + a[$ ce qui assure que la suite converge vers kl.
- Soit $a > 0$ un réel. Alors, puisque (u_n) diverge vers $+\infty$, il existe un rang N tel que pour tous les rangs $n \geq N$, $u_n > \frac{a}{k}$. D'où pour tout $n \geq N$, $ku_n > a$.

Propriété :

$\lim u_n$	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	l	l
$\lim v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim u_n + v_n$	....	....	....	....	....	....
$\lim u_n \times v_n$	....	....	....	....	....	....
$\lim \frac{u_n}{v_n}$	si $l' \neq 0$, ...	....	....	....	.....	......

Preuves :
Admises

Exemples :

- Soit v_n définie par $v_n = 5n^2 - 6n$ pour tout $n \geq 0$. On a alors $v_n = n(5n - 6)$. Or $\lim_{n\to+\infty} n =$ .... et $\lim_{n\to+\infty} 5n - 6 =$ .... donc (v_n) .... vers ....
- Soit u_n définie par $u_n = \frac{3n^4+n}{n^3+1}$ pour tout $n \geq 1$. On a alors $u_n = \frac{n^4(3+\frac{1}{n^3})}{n^3(1+\frac{1}{n^3})} = \frac{n(3+\frac{1}{n^3})}{1+\frac{1}{n^3}}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} =$ ...... on a $\lim_{n\to+\infty} 3 + \frac{1}{n^3} =$ .... et $\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n^3} =$ ...... donc $\lim_{n\to+\infty} u_n =$ ..... par produit et quotient, c'est à dire que la suite (u_n) .... donc vers ....

5 Inégalités et limites de suites

Propriété (théorème de ....) :

- Soit (u_n) une suite divergente vers $+\infty$ et (v_n) une suite telle qu'à partir d'un certain rang $v_n \geq u_n$. Alors (v_n) est .... vers ....
- Soit (u_n) une suite divergente vers $-\infty$ et (v_n) une suite telle qu'à partir d'un certain rang $v_n \leq u_n$. Alors (v_n) .... vers ....

Preuve :
On considère un intervalle de la forme $]a; +\infty[$ où a est un réel. (u_n) .... vers .... donc à partir d'un certain rang N les termes de la suite (u_n) sont dans l'intervalle .... A partir d'un certain rang N', ... donc à partir du plus grand des rang N et N', les termes de la suite (v_n) sont dans .... ce qui démontre que la suite (v_n) est divergente vers $+\infty$.

Théorème (dit « théorème des gendarmes ») :

Soient u, v et w des suites avec v et w convergentes vers une même limite l. Si, à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$, alors la suite u est ....

Preuve :
On considère un intervalle ouvert contenant l. Il existe donc un nombre réel e strictement positif tel sue $]l-e;l+e[$ est inclus dans cet intervalle. La suite (v_n) converge vers l donc à partir d'un certain rang N, v_n est supérieur à $l-e$. La suite (w_n) est convergente donc à partir à partir d'un certain rang N', $w_n < l+e$. En outre, à partir d'un certain rang N'', on a $v_n \leq u_n \leq w_n$, donc à partir du plus grand des trois rangs N, N' et N'', on a $u_n \leq v_n > l-e$ et $u_n \geq w_n \leq l+e$ donc w_n est dans l'intervalle considéré. Ceci montre que la suite converge vers l.

Théorème :

Soit (u_n) une suite croissante et convergente vers un réel l. Alors tous les termes de la suite (u_n) sont ....

Preuve :
Démontrons ce résultat par l'absurde. Pour cela, on suppose qu'il existe un terme de la suite, appelons le (u_N), qui est supérieur strictement à l. Soit $d = u_N - l$. On a donc $d > 0$.
On considère l'intervalle $]l-d;l+d[$. u_N n'appartient donc pas à cet intervalle. (u_n) étant une suite croissante, pour tout entier naturel $n \geq N$, $u_n > u_N > l+d$ et donc $u_n \notin]l-d;l+d[$.
On vient donc de trouver un intervalle pour lequel quelque soit le rang p choisi, il existe des termes de la suite plus grand que p (les termes de rang n supérieur au maximum de p et N) qui n'appartiennent pas à cet intervalle : cela contredit la définition de la convergence de la suite vers l.
Cette contradiction montre que la supposition faite au départ est absurde, on ne peut donc pas trouver de terme de la suite qui soit supérieur strictement à l. D'où le résultat.

6 Limites de suites géométriques

Propriété (limite des suites géométriques) :

Soit q un réel. Alors :
- Si ...., alors la suite (q^n) a pour limite .... ;
- si ...., alors la suite (q^n) a pour limite .... ;
- si ...., alors la suite (q^n) ....

Preuve :
- Si $q > 1$ alors $q =$ .... avec $x >$ ......
  Montrons d'abord par récurrence l'inégalité de Bernoulli : pour tout entier naturel n et tout réel x positif $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
  Initialisation : Pour $n = 0$ et pour tout réel x positif d'une part, ... et d'autre part, ... donc l'inégalité est vraie au rang 0.
  Hérédité : On suppose que pour un entier naturel k et tout réel x positif ....

Il faut montrer que ....
Or, $(1+x)^{k+1} =$ .... d'après les propriétés des puissances.
Donc, de $(1+x)^k \geq 1+kx$, on déduit .... car $1+x$ est positif.
D'où $(1+x)^{k+1}$........................... en développant.
et $(1+x)^{k+1}$............................., ... étant positif.
D'où l'hérédité est vraie
Conclusion : Par l'axiome de récurrence, pour tout entier naturel n, $(1+x)^n \geq 1+nx$ pour tout réel positif x.
En appliquant cette inégalité à $q = 1+x$ avec $x > 0$, on obtient $q^n \geq 1+nx$.
Par le théorème de comparaison des limites, comme $\lim_n 1+nx =$........., on a $\lim_n q^n =$..... .
Puisque $\lim_{n\to+\infty}(1+nx) = +\infty$, on a donc $q^n = (1+x)^n$ qui tend vers $+\infty$.

- Si $-1 < q < 1$, alors $|q| < 1$ donc $\frac{1}{|q|} >$ ..... et d'après le cas précédent $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{|q|^n} =$ .... d'où $(|q|^n)$ tend vers ....
  Par suite, $|q|^n = q^n$ si $q > 0$ ou si n est pair et $|q|^n = -q^n$ sinon, d'où $-|q|^n \leq q^n \leq |q|^n$ et par le théorème des gendarmes (q^n) tend vers 0.
- Si $q = -1$, la suite des termes impaires est dans]................[et la suite des termes paires est dans [...............[donc la suite (q^n) ne peut pas converger.

7 Convergence des suites monotones

Théorème (théorème de la limite monotone) :

> Toute suite monotone et bornée est ....

Preuve :
Admise

conséquence :

> Soit (u_n) une suite croissante.
> - Si (u_n) n'est pas majorée alors elle est ....
>   .
> - Si (u_n) est majorée, alors elle est ....

Preuve :

- Soit (u_n) une suite croissante et non majorée. Soit M un réel. Il s'agit de montrer qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]M : +\infty[$.
  La suite n'est pas majorée par M donc il existe un rang N tel que u_N soit supérieure strictement à M, c'est à dire $u_N \in]M;+\infty[$. Puisque la suite est croissante, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq u_N > M$ donc $u_n \in]M;+\infty[$.
  Cela signifie que la suite admet pour limite $+\infty$.
- Application du théorème précédent.