Récurrence et étude de suites, cours, terminale, spécialité Mathématiques

F.Gaudon

20 septembre 2020

Table des matières

1 Démonstration par récurrence

Axiome de récurrence :

Soit $P(n)$ une propriété qui dépend d'un nombre entier naturel n et soit n_0 un nombre entier naturel. Si la propriété $P(n)$ vérifie les deux conditions suivantes :
- Initialisation : $P(n_0)$ est vraie ;
- Hérédité : Si $P(k)$ est vraie pour un nombre entier naturel $k \geq n_0$ alors $P(k+1)$ est vraie ;

Alors pour tout nombre entier naturel $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Exemple 1 :
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.
Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = (n+1)^2$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $(0+1)^2 = 1 = u_0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
Hérédité : Supposons que pour un rang k entier naturel, on a $u_k = (k+1)^2$.
Alors $u_{k+1} = u_k + 2k + 3$ par construction.
Donc $u_{k+1} = (k+1)^2 + 2k + 3$ par hypothèse de récurrence.
Puis $u_{k+1} = k^2 + 2k + 1 + 2k + 3 = k^2 + 4k + 4 = (k+2)^2$.
Donc $u_{k+1} = (k+1+1)^2$, c'est à dire que la propriété est vraie au rang $k+1$ donc qu'elle est héréditaire.
Conclusion : Pour tout entier naturel n, $u_n = (n+1)^2$.

Exemple 2 :
Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 10$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}u_n$.
Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $u_n > 2$.

Initialisation : $u_1 = 10$ donc $u_1 > 2$, la propriété est donc vraie au rang 1.
Hérédité : On suppose que pour un rang k non nul, la propriété est vraie, c'est à dire que $u_k > 2$.
Il faut montrer que $u_{k+1} > 2$.
Or $u_{k+1} = 1 + \frac{1}{2}u_k$ par construction de la suite.
Puis, par hypothèse de récurrence, $u_k > 2$ donne $\frac{1}{2}u_k > \frac{1}{2} \times 2$ c'est à dire $\frac{1}{2}u_k > 1$.
Puis $\frac{1}{2}u_k + 1 > 1 + 1$ soit $\frac{1}{2}u_k + 1 > 2$.
C'est à dire $u_{k+1} > 2$. La propriété est donc vraie au rang $k+1$. Elle est donc héréditaire.
Conclusion : Pour tout entier naturel n non nul, $u_n > 2$.

Exemple 3 :
Démontrons la propriété suivante : Si u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, alors pour tout entier naturel $n \geq 1$, alors u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.

- Initialisation : pour $n = 1$, $u' = 1 \times u' \times u^{1-1}$ donc la propriété est vraie au rang 1.
- Hérédité : Supposons la propriété vraie pour un certain rang $k \geq 1$, c'est à dire que u^k est dérivable sur I et que $(u^k)' = ku'u^{k-1}$.
  Alors $u^{k+1} = u^k \times u$ donc, u^k et u étant dérivables, le produit u^{k+1} est dérivable sur I.
  Par ailleurs, $(u^{k+1})' = (u^k)' \times u + u^k \times u'$ d'après la formule de dérivation des produits.
  Donc $(u^{k+1})' = ku'u^{k-1} \times u + u^k \times u'$ par hypothèse de récurrence
  Finalement, on a donc $(u^{k+1})' = ku'u^k + u'u^k = (k+1)u'u^k$ ce qui est l'écriture de la propriété au rang $k+1$: la propriété est donc vraie au rang $k+1$ et donc héréditaire.

- Conclusion : d'après l'axiome de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout rang $n \geq 1$.

2 Étude de suites

2.1 Suites majorées, minorées, bornées

Définition :

Soit (u_n) une suite définie à partir d'un certain rang $p \in \mathbb{N}$. (u_n) est dite :
- *majorée* à partir du rang p s'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel $n \geq p$, $u_n \leq M$;
- *minorée* à partir du rang p s'il existe un réel m tel que pour tout entier naturel $n \geq p$, $u_n \geq m$;
- *bornée* à partir du rang p si elle est majorée et minorée à partir du rang p.

Exemple :

Suite définie en fonction de n : Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 3 - \frac{4}{n}$ pour tout entier naturel n non nul.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 3 = -\frac{4}{n}$ d'où $u_n - 3 < 0$ c'est à dire $u_n < 3$.
La suite (u_n) est donc majorée par 3.

Suite définie par récurrence : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$.
Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $0 \leq u_n \leq 3$.
- Initialisation : Pour $n = 1$, $u_1 = \sqrt{u_0 + 5} = \sqrt{5} < 3$ donc $0 \leq u_1 \leq 3$.
- Hérédité : Supposons que pour un rang $k \geq 1$, $0 \leq u_k \leq 3$.
  Soit f la fonction définie sur $]-5; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+5}$.
  On a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+5}} > 0$ donc f est croissante sur $]-5; +\infty[$.
  Comme $f(0) = \sqrt{5}$ et $f(3) = \sqrt{8} < 3$, on a donc pour tout $x \in [0; 3]$, $f(x) \in [0; 3]$.
  De $0 \leq u_k \leq 3$, on déduit donc $0 \leq f(u_k) \leq 3$, c'est à dire $0 \leq u_{k+1} \leq 3$, la propriété est donc héréditaire.
- Conclusion : par l'axiome de récurrence, on a obtient donc pour tout $n \geq 1$, $0 \leq u_n \leq 3$.

2.2 Étude de variations de suites récurrentes

Exemple :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 0,3u_n + 1$.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0,3x + 1$. f est strictement *croissante* sur $\mathbb{R}$.
Montrons par récurrence que (u_n) est une suite strictement *décroissante*, c'est à dire que pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n-1}$

- Initialisation : $u_1 - u_0 = 0,3 \times 3 + 1 - 3 = -1,1 < 0$;
- Hérédité : on suppose que pour un rang $k \geq 1$, $u_k < u_{k-1}$.
  Alors $u_k < u_{k-1}$ et, par stricte croissance de la fonction f, $f(u_k) < f(u_{k-1})$, c'est à dire $u_{k+1} < u_k$.
  Par conséquent, la propriété est vraie au rang $k+1$ et est donc héréditaire.
- Conclusion : Par récurrence, on donc pour tout $n \geq 1$, $u_n < u_{n-1}$, c'est à dire que la suite (u_n) est décroissante.

BY NC SA