Récurrence et suites, cours, terminale, spécialité mathématiques

1 Démonstration par récurrence

Axiome de récurrence :

Soit $P(n)$ une propriété qui dépend d'un nombre entier naturel n et soit n_0 un nombre entier naturel. Si la propriété $P(n)$ vérifie les deux conditions suivantes :

- Initialisation : $P(n_0)$ est vraie ;
- Hérédité : Si $P(k)$ est vraie pour un nombre entier naturel $k \geq n_0$ alors $P(k+1)$ est vraie ;

Alors pour tout nombre entier naturel $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Exemple 1 :
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.
Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = (n+1)^2$.

Initialisation : Pour $n = 0$, ... donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
Hérédité : Supposons que pour un rang k entier naturel, on a $u_k = (k+1)^2$.
Alors $u_{k+1} =$................. par construction.
Donc $u_{k+1} =$.................. par hypothèse de récurrence.
Puis $u_{k+1} =$..................... .
Donc $u_{k+1} =$............., c'est à dire que la propriété est vraie au rang $k+1$ donc qu'elle est héréditaire.
Conclusion : Pour tout entier naturel n, $u_n = (n+1)^2$.

Exemple 2 :
Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 10$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}u_n$.
Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $u_n > 2$.

Initialisation : .... donc $u_1 > 2$, la propriété est donc vraie au rang 1.
Hérédité : On suppose que pour un rang k non nul, la propriété est vraie, c'est à dire que $u_k > 2$.
Il faut montrer que ....
Or $u_{k+1} = 1 + \frac{1}{2}u_k$ par construction de la suite.
Puis, par hypothèse de récurrence, $u_k > 2$ donne $\frac{1}{2}u_k >$ .... c'est à dire $\frac{1}{2}u_k >$ ....
Puis $\frac{1}{2}u_k + 1 >$ .... soit $\frac{1}{2}u_k + 1 >$ ....
C'est à dire .... La propriété est donc vraie au rang $k+1$. Elle est donc héréditaire.
Conclusion : Pour tout entier naturel n non nul, $u_n > 2$.

2 Étude de suites

2.1 Suites majorées, minorées, bornées

Définition :

Soit (u_n) une suite définie à partir d'un certain rang $p \in \mathbb{N}$. (u_n) est dite :
- *majorée* à partir du rang p s'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel $n \geq p$, $u_n \leq M$;
- *minorée* à partir du rang p s'il existe un réel m tel que pour tout entier naturel $n \geq p$, $u_n \geq m$;
- *bornée* à partir du rang p si elle est majorée et minorée à partir du rang p.

Exemples :

Suite définie en fonction de n : Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 3 - \frac{4}{n}$ pour tout entier naturel n non nul.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 3 =$ .... d'où le signe de $u_n - 3$ est .... c'est à dire u_n....3.
La suite (u_n) est donc .... par 3.

Suite définie par récurrence : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$.
Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $0 < u_n < 3$.
- Initialisation : Pour $n = 1$, $u_1 =$...... donc ....
- Hérédité : Supposons que pour un rang $k \geq 1$, $0 < u_k < 3$.
  Soit f la fonction définie sur $]-5; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+5}$.
  On a $f'(x) =$................ donc f est strictement .... sur $]-5; +\infty[$.
  Comme $f(0) =$.... et $f(3) =$ ...., on a donc pour tout $x \in [0; 3]$, $f(x) \in$ ....
  De $0 < u_k < 3$, on déduit donc .... $< f(u_k) <$ ...., c'est à dire .... $< u_{k+1} <$ ...., la propriété est donc héréditaire.
- Conclusion : par l'axiome de récurrence, on a obtient donc pour tout $n \geq 1$, $0 < u_n < 3$.

2.2 Étude de variations de suites récurrentes

Exemple :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 0,3u_n + 1$.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0,3x + 1$. f est .... sur $\mathbb{R}$.
Montrons par récurrence que (u_n) est une suite *décroissante*, c'est à dire que pour tout entier naturel n, $u_n - u_{n-1}$.....

- Initialisation : $u_1 - u_0 =$ .... ;
- Hérédité : on suppose que pour un rang $k \geq 1$, $u_k - u_{k-1} < 0$.
  Alors $u_k < u_{k-1}$ et, comme la fonction f est strictement .... , $f(u_k)$.....$f(u_{k-1})$, c'est à dire u_{k+1}....u_k donc $u_{k+1} - u_k$.....0.
  Par conséquent, la propriété est vraie au rang $k+1$ et est donc héréditaire.
- Conclusion : Par récurrence, on donc pour tout $n \geq 1$, $u_n < u_{n-1}$, c'est à dire que la suite (u_n) est décroissante.