

Probabilités, expériences répétées, cours, terminale spécialité Mathématiques

1 Dénombrements

1.1 k -uplets

Définitions :

Soit E un ensemble.

- Soit k un entier naturel non nul et a_1, a_2, \dots, a_k k éléments de E . la suite ordonnée et finie d'éléments $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ est appelé *k -uplet*. En particulier, si $k = 2$, $(a_1; a_2)$ est appelé *couple* d'éléments et si $k = 3$, $(a_1; a_2; a_3)$ est appelé *triplet*.
- L'ensemble des k -uplets est appelé *produit cartésien* des k ensembles E et est noté E^k .

Propriété :

Soit E un ensemble de n éléments et k un entier naturel non nul. Le produit cartésien E^k est constitué de n^k k -uplets.

1.2 Combinaisons

Définition :

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On appelle *factorielle n* le nombre noté $n!$ défini par $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1$.

Par convention $0! = 1$.

Exemple :

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120.$$

Définition :

n et p désignent des entiers tels que $0 \leq p \leq n$ et E un ensemble à n éléments. Une combinaison de p éléments de E est un sous ensemble de E à p éléments.

Exemple :

Si $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, alors $F = \{3; 5\}$ et $G = \{1; 3\}$ sont des combinaisons de 2 éléments de E .

Propriété :

Soient n et p deux entiers naturels tels que $0 \leq p \leq n$ et E un ensemble à n éléments. Le nombre de combinaisons de p éléments de E , noté $\binom{n}{p}$ (lire p parmi n) est donné par

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Preuve :

Admise

Exemple :

Nombre de combinaisons de 4 éléments parmi 7 c'est à dire de sous ensembles de 4 éléments dans un ensemble de 7 éléments :

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \times 6 \times \dots \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1} = 35$$

Utilisation de la calculatrice :

Casio : Touche $\boxed{\text{nCr}}$. Taper sur $\boxed{\text{OPTN}}$ puis $\boxed{\text{PROB}}$ puis $\boxed{\text{nCr}}$.

Syntaxe : $7\boxed{\text{nCr}}4$

TI : Touche $\boxed{\text{Combinaison}}$. Taper sur $\boxed{\text{math}}$ puis aller dans le menu $\boxed{\text{PROB}}$ puis choisir $\boxed{\text{Combinaison}}$.

Syntaxe : $7\boxed{\text{Combinaison}}4$

Numworks : menu boîte à outils puis $\boxed{\text{Dénombrement}}$ puis $\boxed{\text{binomial}(n,k)}$ (Attention : nom mal choisi, cela n'a rien à voir avec une loi binomiale).

1.3 Propriétés des combinaisons

Propriété :

Pour tous les entiers n et p tels que $0 \leq p \leq n$,

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Preuve :

Soit E un ensemble à n élément. À toute partie de E on associe de manière unique sa partie complémentaire \bar{A} . A contient p éléments si et seulement si \bar{A} contient $n - p$ éléments. Il y a donc autant de parties à p éléments dans E que de parties à $n - p$ éléments.

Propriété :

Pour tous les entiers n et p tels que $1 \leq p \leq n - 1$,

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Preuve :

Soit E un ensemble à n éléments. Soit a un élément de E . Les parties de E à p éléments se répartissent en deux catégories :

- les parties F à p éléments qui ne contiennent pas l'élément a : il y en a donc autant que de parties à p éléments dans un ensemble à $n - 1$ éléments, c'est à dire $\binom{n-1}{p}$
- les parties G à p éléments qui contiennent l'élément a : il en a autant que de parties à $p - 1$ éléments dans un ensemble à $n - 1$ éléments, c'est à dire $\binom{n-1}{p-1}$.

Comme il y a au total $\binom{n}{p}$ parties à p éléments dans E , on obtient le résultat.

Triangle de Pascal :

Le triangle de Pascal, du nom de Blaise Pascal, mathématicien français du XVII^e siècle qui le « redécouvra » en Occident (car il était connu avant en Orient et au Moyen-Orient) est une disposition permettant de visualiser et de calculer les coefficients binomiaux et qui s'appuie sur la formule précédente.

$\binom{0}{0} = 1$					
$\binom{1}{0} = 1$	$\binom{1}{1} = 1$				
$\binom{2}{0} = 1$	$\binom{2}{1} = 2$	1			
$\binom{3}{0} = 1$	$\binom{3}{1} = 3$	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Explication de la construction : le nombre de la ligne n et de la colonne k est le coefficient binomial $\binom{n-1}{k-1}$. Il est obtenu en ajoutant le nombre situé au dessus (ligne $n - 1$ et colonne k) au nombre de la colonne et de la ligne précédente (ligne $n - 1$ et colonne $k - 1$).

Par exemple, $\binom{3}{1} = 3$ est la somme de $\binom{2}{1} = 2$ et de $\binom{2}{0} = 1$.

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Exemple de programmation du triangle de Pascal en langage python :

```
def trianglePascal(n):
    L=[1]
    L=L+[0 for k in range(n)]
    t=[L]
    for k in range(1,n+1):
        L=[1]
        for l in range(1,k+1):
            L.append(t[k-1][l]+t[k-1][l-1])
        L=L+[0 for l in range(k,n)]
        t=t+[L]
    return t
```

2 Schéma et loi de Bernoulli

Définition :

On considère une expérience aléatoire ne comportant que deux issues ; l'une appelée « succès » et l'autre appelée « échec ». On note p la probabilité de succès avec $p \in [0; 1]$ et q la probabilité d'échec ($q = 1 - p$). Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeurs 0 et 1 avec pour probabilités respectives p et $q = 1 - p$. On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p .

Définition :

Deux expériences sont dites *indépendantes* si le résultat de l'une n'influe pas sur le résultat de l'autre.

Exemple :

il y a indépendance lorsqu'on lance deux fois de suite une pièce de monnaie.

Définition :

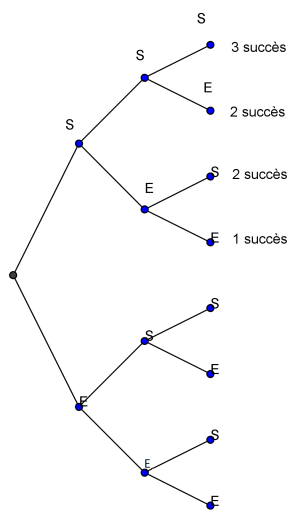
On considère une expérience de Bernoulli de probabilité de succès p . La répétition de cette expérience n fois de manière indépendante constitue *un schéma de Bernoulli* de paramètres n et p .

Propriété :

Dans un schéma de Bernoulli, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat

Exemple :

On contrôle la qualité d'un produit sur une chaîne de production. On prélève 3 produits au hasard. On suppose que les prélèvements sont indépendants. Statistiquement, chaque produit a une probabilité $p = 0,05$ d'être défectueux.



Sur l'arbre ci-dessus représentant un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$, la probabilité d'avoir les deux premières expériences qui donnent un succès et la dernière qui donne un échec est $P(SS\bar{S}) = 0,05^2 \times 0,95 \approx 0,002$ soit 0,2 % de chances d'avoir deux produits défectueux sur les trois prélevés.

Propriété :

Si X est une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0; 1]$, alors :

- $E(X) = p$;
- $V(X) = p(1 - p)$;
- $\sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$.

Preuve :

- $E(X) = x_1P(X = x_1) + x_2P(X = x_2) = 1P(X = 1) + 0P(X = 0) = 1p + 0(1 - p) = p$
- $V(X) = P(X = x_1)(x_1 - E(X))^2 + P(X = x_2)(x_2 - E(X))^2 = p(1 - p)^2 + (1 - p)(0 - p)^2 = p(1 - 2p + p^2) + (1 - p)p^2 = p - 2p^2 + p^3 + p^2 - p^3 = p - p^2 = p(1 - p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{p(1 - p)}$

Algorithmique :

Algorithme de simulation d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p .

Données : p : nombre décimal entre 0 et 1 ;

Début traitement

t prend une valeur aléatoire décimale entre 0 inclus et 1 exclu ;

si $t < p$ **alors**

 | Renvoyer "Succès" ;

fin

sinon

 | Renvoyer "Échec" ;

fin

Fin

Exemple de programmation en langage python :

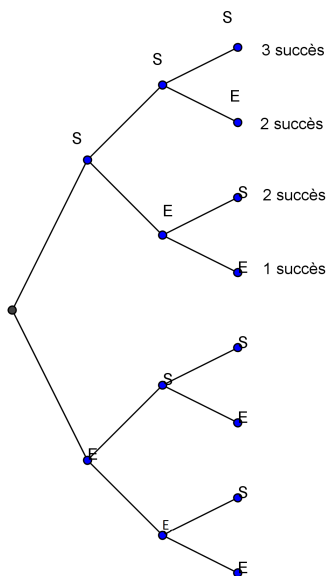
```
import random
def bernoulli(p):
    t=random.random()
    if t<p:
        return 1
    else:
        return 0
```

3 Loi binomiale

Propriété :

Soient n et k deux entiers naturels avec $k \leq n$. Le nombre de manières d'obtenir k succès et $n - k$ échecs pour n répétitions indépendantes de la même expérience de Bernoulli est $\binom{n}{k}$.

Exemple :



$\binom{3}{3} = 1$: il y a une seule manière d'obtenir 3 succès lors de la répétition de 3 épreuves identiques indépendantes.

$\binom{3}{2} = 3$: il y a trois manières d'obtenir 2 succès et un échec lors de la répétition de 3 épreuves identiques indépendantes (SSE ; SES ; ESS).

Définition :

On considère une épreuve de Bernoulli de paramètre $p \in [0; 1]$. On répète n fois ($n \geq 1$) cette expérience indépendamment et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès. On dit alors que la variable aléatoire X suit une loi *binomiale* de paramètres n et p et on note $X \sim \mathcal{B}(n; p)$.

Propriété :

Si X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p , alors la probabilité d'obtenir k succès avec $k \in \{0; 1; 2; \dots; n\}$ est

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Preuve :

Il y a $\binom{n}{k}$ manières d'obtenir k succès dans n répétitions d'expériences identiques et indépendantes. La probabilité de chacune de ces événements qui sont évidemment incompatibles est $p^k(1-p)^{n-k}$ d'où le résultat.

Exemple :

On considère le problème précédent de test des produits d'une chaîne de production. Les prélèvements étant supposés indépendants les uns des autres, l'expérience constitue un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$. La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$.

On a $P(X = 2) = P(SS\bar{S} \cap S\bar{S}S \cap \bar{S}SS)$

car trois chemins permettent d'obtenir deux succès c'est à dire deux objets défectueux.

D'où $P(X = 2) = P(SS\bar{S}) + P(S\bar{S}S) + P(\bar{S}SS)$

donc $P(X = 2) = 0,05^2 \times 0,95 + 0,95 \times 0,05 \times 0,95 + 0,95 \times 0,05^2 = 3 \times 0,05^2 \times 0,95 = 0,007$

soit une probabilité très faible de 0,007 d'avoir deux produits défectueux.

Calcul pratique de $P(X = k)$ et $P(X \leq k)$:

Soit X une variable aléatoire de paramètres n et p . Pour k allant de 0 à n , pour calculer $P(X = k)$ ou $P(X \leq k)$, on utilise une calculatrice :

- Sur Texas instrument : aller dans le menu $\boxed{2nd} \boxed{distrib}$, choisir $\boxed{binomFdp}$ et taper $\boxed{n} \boxed{,} \boxed{p} \boxed{,} \boxed{k} \boxed{)}$ pour calculer $P(X = k)$ et choisir $\boxed{binomFRép}$ et taper $\boxed{n} \boxed{,} \boxed{p} \boxed{,} \boxed{k} \boxed{)}$ pour calculer $P(X \leq k)$.
- Sur Casio : aller dans le menu \boxed{STAT} puis \boxed{DIST} puis \boxed{BINM} . Sélectionner alors \boxed{Bpd} puis \boxed{Var} pour variable, puis entrer alors k dans la ligne « x », n dans la ligne « numtrial » et p dans la ligne « p » puis aller sur « execute » pour valider et calculer ainsi $P(X = k)$. Pour le calcul de $P(X \leq k)$, on utilisera \boxed{Bcd} au lieu de \boxed{Bpd} .

Exemple :

On considère une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,4$. Sur TI, la probabilité $P(X \leq 3)$ est donnée par $\boxed{binomFrép(4,0.4,3)}$.

Remarques :

- On a $P(X < 3) = P(X \leq 2)$
- pour calculer $P(X > k)$, on calcule $1 - P(X \leq k)$.

Algorithmique :

Algorithme de simulation d'une loi binomiale de paramètres n et p .

```

Données :  $p$  : nombre décimal entre 0 et 1;  $n$  : entier naturel;
Début traitement
   $c \leftarrow 0$ ;
  pour  $k$  de 1 jusqu'e  $n$  faire
     $t$  prend une valeur aléatoire décimale entre 0 inclus et 1 exclu;
    si  $t < p$  alors
       $c \leftarrow c + 1$ ;
    fin
  fin
Fin

```

Exemple de programmation en langage python :

```

import random
def simulBinomiale(n,p):
    c=0
    for k in range(1,n+1):
        t=random.random()
        if t<p:
            c=c+1
    return c

```