Concentration et loi des grands nombres, cours, terminale, spécialité Mathématiques

1 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev et application

Propriété, Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :
Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X) = \mu$ et de variance $V(X) = V$.
Pour tout réel strictement positif δ, on a :

$$P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2}$$

Conséquence :
Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X) = \mu$ et d'écart type σ
Pour tout entier naturel non nul k,

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

Preuve :
On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = k\sigma$:
$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{(k\sigma)^2}$
D'où $P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$

Exemple :
Une variable aléatoire Y a pour espérance $E(Y) = 2$ et pour variance $V(Y) = 0,25$. Cherchons à minorer la probabilité $P(1 < Y < 3)$:
On remarque que $P(1 < Y < 3) = P(|Y - E(Y)| < 2\sigma) = 1 - P(|Y - E(Y)| \geq 2\sigma)$ en tenant compte de $\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = 0,5$.
D'après la conséquence de l'inégalité de Bienhaymé-Chebychev, on a donc :
$P(|Y - E(Y)| \geq 2\sigma) \leq \frac{1}{2^2}$ donc $P(|Y - E(Y)| \geq 2\sigma) \geq 1 - \frac{1}{4}$ soit $P(1 < Y < 3) \geq \frac{3}{4}$

2 Inégalité de concentration et loi des grands nombres

Propriété, inégalité de concentration :
Soit $(X_1; X_2; ...; X_n)$ une liste de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi d'espérance μ et de variance V. Soit $M_n = \frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}$ la variable aléatoire moyenne de cet échantillon. Alors pour tout réel $\delta > 0$, on a

$$P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2}$$

Preuve :
D'après les propriétés des sommes de variables aléatoires indépendantes, on a $E(M_n) = \mu$ et $V(M_n) = \frac{V}{n}$.
L'inégalité de Bienaymé-Chebychev donne alors :
$P(|M_n - \mu| \leq \delta) \leq \frac{V(M_n)}{\delta^2}$ donc $P(|M_n - \mu| \leq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2}$

Propriété, loi(faible) des grands nombres :
Soit $(X_1; X_2; ...; X_n)$ une liste de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi d'espérance μ et soit $M_n = \frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}$ la variable aléatoire moyenne de cet échantillon. Pour tout réel $\delta > 0$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} P(|M_n - \mu| \geq \delta) = 0$$

Preuve :
Admise