Sommes de variables aléatoires, cours, terminale, spécialité Mathématiques

1 Variables aléatoires X+Y et aX

Définition :

Soit X et Y deux variables aléatoires sur un même univers Ω.

Soit a_1, a_2,..., a_n avec $n \in \mathbb{N}^*$ les valeurs prises par X et b_1, b_2,..., b_m avec $m \in \mathbb{N}^*$ les valeurs prises par Y.

- La variable aléatoire $X+Y$ est la variable aléatoire qui prend pour valeurs $a_i + b_k$ où $i \in \{1; 2; ...; n\}$ et $j \in \{1; 2; ...; m\}$.
  La loi de probabilité de $X+Y$ est la donnée de l'ensemble des valeurs w prises par $X+Y$ et des probabilités $P(X+Y=w)$ égales à la somme des probabilités $P(X = a_i \cap Y = b_j)$ avec i et j tels que $a_i + b_j = w$.

Définition :

Soit a un réel non nul. La variable aléatoire aX est la variable aléatoire qui prend pour valeurs aa_i avec une probabilité $P(aX = aa_i) = P(X = a_i)$ pour tout $i \in \{1; 2; ...; n\}$.

Propriété :

On a :

- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$;
- $E(aX) = aE(X)$;
- $V(aX) = a^2V(X)$;
- $\sigma(aX) = |a|\sigma(X)$.

Preuve :

- Admise.
- $E(aX) = \sum_{i=1}^{n} aa_iP(aX = aa_i) = \sum_{i=1}^{n} P(X = a_i)aa_i = a\sum_{i=1}^{n} P(X = a_i)a_i = E(X)$;
- $V(aX) = \sum_{i=1}^{n} P(ax = aa_i)(aa_i - E(aX))^2 = \sum_{i=1}^{n} P(X = a_i)(aa_i - aE(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} P(X = a_i)a^2(a_i - E(X))^2 = a^2\sum_{i=1}^{n} P(X = a_i)(a_i - E(X))^2 = a^2V(X)$
- $\sigma(aX) = \sqrt{V(aX)} = \sqrt{a^2V(X)} = |a|\sqrt{V(X)} = |a|\sigma(X)$

2 Indépendance de variables aléatoires

Définition :
Les deux variables aléatoires X et Y sont dites *indépendantes* si pour tout $i \in \{1; 2; ...; n\}$ et tout $j \in \{1; 2; ...; n\}$,

$$P(X = a_i \cap Y = b_j) = P(X = a_i)P(Y = b_j)$$

Propriété :
Si X et Y sont indépendantes, alors

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

Preuve :
Admise

Propriété :
Si $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ où les X_i pour tout $i \in \{1; 2; ...; n\}$ sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0; 1]$, alors X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ et :

- $E(X) = np$;
- $V(X) = np(1 - p)$;
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$.

Exemple :
On contrôle la qualité d'un produit sur une chaîne de production. On prélève $n = 100$ produits au hasard. On suppose que les prélèvements sont indépendants. Statistiquement, chaque produit a une probabilité $p = 0,05$ d'être défectueux.
Pour ce problème, en prélevant $n = 100$ produits indépendamment, on appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de produit défectueux. X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,05$. On a alors $E(X) = np = 100 \times 0,05 = 5$ ce qui signifie que l'on peut prévoir 5 produits défectueux pour un prélèvement de 100 produits indépendants.

Preuve :

- $E(X) = E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n)$ par linéarité de l'espérance.
  D'où $E(X) = nE(X_1)$ les variables aléatoire X_i suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p dont l'espérance est p.

- $V(X) = V(X_1 + X_2 + ... + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + ... + V(X_n)$ car les X_i sont indépendantes. D'où $V(X) = nV(X_1) = np(1-p)$ car X_i suivent toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p dont la variance est $p(1-p)$.
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)}$

3 Moyenne d'un échantillon

Définition :

- Un échantillon de taille n d'une loi de probabilité est une liste $(X_1; X_2; ..; X_n)$ de n variables aléatoires indépendantes et identiques qui suivent toutes cette loi.
- La moyenne de cette échantillon est la variable aléatoire $M_n = \frac{X_1+X_2+...+X_n)}{n}$.

Propriété :

- $E(M_n) = E(X)$;
- $V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$;
- $\sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$.

Preuve :

- $E(M_n) = E(\frac{1}{n}(X_1+X_2+...+X_n)) = \frac{1}{n}E(X_1+X_2+...+X_n) = \frac{1}{n}(E(X_1)+E(X_2)+...+E(X_n)) = \frac{1}{n}nE(X) = E(X)$
- $V(M_n) = V(\frac{1}{n}(X_1+X_2+...+X_n)) = (\frac{1}{n})^2 V(X_1+X_2+...+X_n) = \frac{1}{n^2}(V(X_1)+V(X_2)+...+V(X_n))$ car les variables aléatoires X_1, X_2,..., X_n sont indépendantes.
  D'où $V(M_n) = \frac{1}{n^2}nV(X) = \frac{1}{n}V(X)$
- $\sigma(M_n) = \sqrt{V(M_n)} = \sqrt{\frac{1}{n}V(X)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma(X)$