Sommes de variables aléatoires, cours, terminale, spécialité Mathématiques

1 Variables aléatoires X+Y et aX

Définition :

Soit X et Y deux variables aléatoires sur un même univers Ω.

Soit a_1, a_2,..., a_n avec $n \in \mathbb{N}^*$ les valeurs prises par X et b_1, b_2,..., b_m avec $m \in \mathbb{N}^*$ les valeurs prises par Y.

- La variable aléatoire $X + Y$ est la variable aléatoire qui prend pour valeurs .... où $i \in \{1; 2; ...; n\}$ et $j \in \{1; 2; ...; m\}$.
  La loi de probabilité de $X + Y$ est la donnée de l'ensemble des valeurs w prises par .... et des probabilités .... égales à la somme des probabilités .... avec i et j tels que $a_i + b_j = w$.

Définition :

Soit a un réel non nul. La variable aléatoire aX est la variable aléatoire qui prend pour valeurs .... avec une probabilité .... pour tout $i \in \{1; 2; ...; n\}$.

Propriété :

On a :

- $E(X + Y) =$............ ;
- $E(aX) =$............. ;
- $V(aX) =$............. ;
- $\sigma(aX) =$........... .

Preuve :

- Admise.
- $E(aX) =$..................
  ....
- $V(aX) =$...................
  ....
- $\sigma(aX) =$................

2 Indépendance de variables aléatoires

Définition :
Les deux variables aléatoires X et Y sont dites *indépendantes* si pour tout $i \in \{1; 2; ...; n\}$ et tout $j \in \{1; 2; ...; n\}$,

....

Propriété :
Si X et Y sont indépendantes, alors

$$V(X+Y) = ...$$

Preuve :
Admise

Propriété :
Si $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ où les X_i pour tout $i \in \{1; 2; ...; n\}$ sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0; 1]$, alors X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ et :

- $E(X) =$....... ;
- $V(X) =$.......... ;
- $\sigma(X) =$........... .

Preuve :

- $E(X) =$.. par linéarité de l'espérance.
  D'où $E(X) =$............................ les variables aléatoire X_i suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p dont l'espérance est ....
- $V(X) = V(X_1 + X_2 + ... + X_n) =$... car les X_i sont indépendantes.
  D'où $V(X) =$................................. car les X_i suivent toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p dont la variance est ....
- $\sigma(X) =$............................

Exemple :
On contrôle la qualité d'un produit sur une chaîne de production. On prélève $n = 100$ produits au hasard. On suppose que les prélèvements sont indépendants. Statistiquement, chaque produit a une probabilité $p = 0,05$ d'être défectueux.

Pour ce problème, en prélevant $n = 100$ produits indépendamment, on appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de produit défectueux. X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,05$. On a alors $E(X) = np =$................ ce qui signifie que l'on peut prévoir .... produits défectueux pour un prélèvement de 100 produits indépendants.

3 Moyenne d'un échantillon

Définition :

- Un échantillon de taille n d'une loi de probabilité est une liste $(X_1; X_2; ..; X_n)$ de n variables aléatoires .... qui suivent toutes .... loi.
- La moyenne de cet échantillon est la variable aléatoire $M_n = \frac{X_1+X_2+...+X_n)}{n}$.

Propriété :

- $E(M_n) =$....... ;
- $V(M_n) =$........ ;
- $\sigma(M_n) =$............. .

Preuve :

- $E(M_n) =$..........
  ....
- $V(M_n) =$................
  car les variables aléatoires X_1, X_2,..., X_n sont indépendantes.
  D'où $V(M_n) =$..............
  ....
- $\sigma(M_n) =$................