Limites de fonctions, cours, terminale spécialité Mathématiques

F.Gaudon

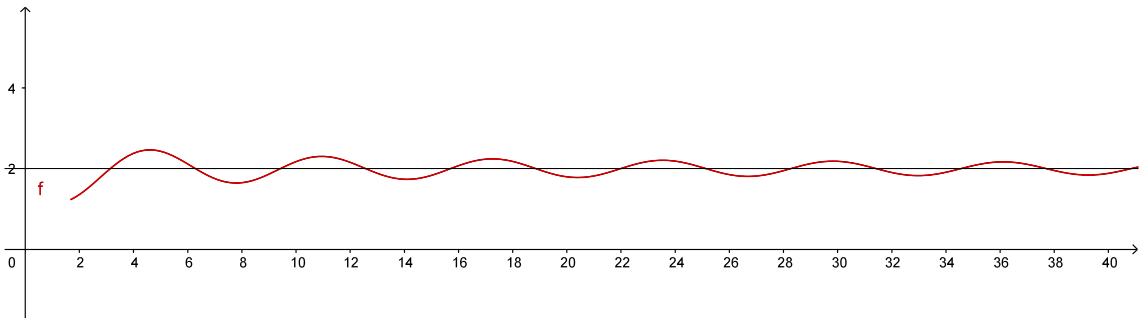
13 avril 2021

Table des matières

1 Limites finies à l'infini

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;+\infty[$ ou $]-\infty;a]$ avec $a \in \mathbb{R}$.
Définition :

Soit l un réel. f admet pour limite l en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si pour tout intervalle contenant l, il existe un réel x_0 tel que pour tous les réels x supérieurs à x_0 (resp. pour tous les réels x inférieurs à x_0) , $f(x)$ appartient à cet intervalle. On note alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ (resp. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$).
On dit aussi que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$ (resp. tend vers $-\infty$).



Propriété :

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$
  et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$
- Pour tout entier naturel $k > 0$,
  $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^k} = 0$
  et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^k} = 0$
- Pour tout réel k,
  $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-k} = 0$
  et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-k} = 0$
- $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

Définition :

Soit $l \in \mathbb{R}$ et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère.
On dit que la droite d'équation $y = l$ est *asymptote horizontale* à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ (resp. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$.

Exemples :
$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$
donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à l'hyperbole en $+\infty$ et en $-\infty$.

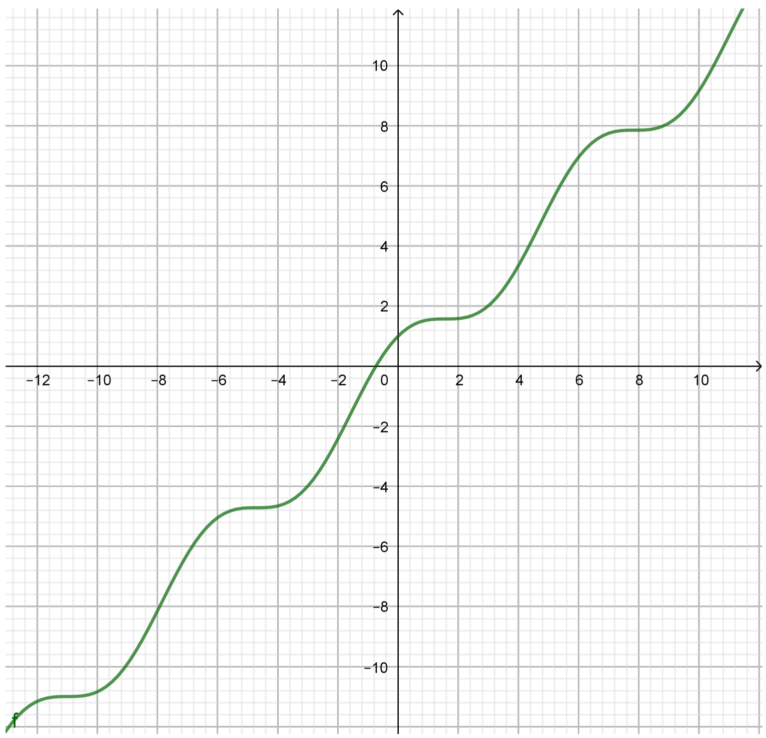
2 Limites infinies à l'infini

Définition :

f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$ en $+\infty$) si pour tout intervalle $]M;+\infty[$ (resp. $]-\infty;M]$) où M est un réel, il existe un réel x_0 tel que pour tous les réels x supérieurs à x_0, $f(x) \in]M;+\infty[$ (resp. $f(x) \in]-\infty;M]$).
On note alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$).
On dit aussi que $f(x)$ tend vers $+\infty$ (resp. tend vers $-\infty$) quand x tend vers $+\infty$.

Remarque :
On définit de même les limites en $-\infty$.

Remarque :
Limites et monotonie ne sont, en général, pas liées.
On peut montrer que pour la fonction :
$f : x \mapsto x + \cos(x)$
on a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
mais que cette fonction n'est pourtant pas croissante.



Propriétés :

Pour tout entier naturel k non nul,
- $\lim_{x\to+\infty} x^k = +\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

3 Limites en un réel

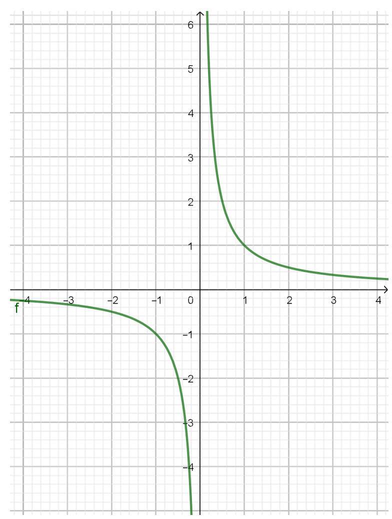
On considère dans ce paragraphe une fonction f définie sur un ensemble D_f et $a \in D_f$ où a est l'extrémité d'un intervalle de D_f.

Définition :

- f admet pour limite à droite $l \in \mathbb{R}$ (resp. $+\infty$) en a si pour tout intervalle $]u;v[$ contenant l il existe un réel $x_0 > a$ tel que pour tout $x \in]a;x_0[$ on a $f(x) \in]u;v[$ (resp. si pour tout intervalle $]u;+\infty[$, il existe x_0 tel que pour tout $x \in]a;x_0[$ on a $f(x) \in]u;+\infty[$).
  On note alors $\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = l$ (resp. $\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = +\infty$).
- f admet pour limite à gauche $l \in \mathbb{R}$ (resp. $+\infty$) en a si pour tout intervalle $]u;v[$ contenant l, il existe un réel $x_0 < a$ tel que pour tout $x \in]x_0;a[$ on a $f(x) \in]u;v[$ (resp. si pour tout intervalle $]u;+\infty[$, il existe x_0 tel que pour tout $x \in]x_0;a[$ on a $f(x) \in]u;+\infty[$).
  On note alors $\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = l$ (resp. $\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = +\infty$).

Exemple :

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$
et $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x} = -\infty$.



Définition :

Soit a un réel, $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère. On dit que la droite d'équation $x = a$ est *asymptote verticale* à $\mathcal{C}$ si la limite à droite ou la limite à gauche de f en a est $+\infty$ ou $-\infty$.

Définition :

On dit que f admet pour limite $+\infty$ en a lorsque pour tout intervalle de la forme $]u;+\infty[$, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez proche de a. On écrit $\lim_{x \mapsto a} f(x) = +\infty$.

Remarque :
On définit de même $\lim_{x \mapsto a} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \mapsto a} f(x) = l$ où l est un réel.

4 Opérations sur les limites

4.1 Addition, multiplication, quotient

Dans ce qui suit, a est un réel ou $a = +\infty$ ou $a = -\infty$.

Propriétés :

$\lim_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a}(f+g)(x)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	indéterminée

$\lim_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}*$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{x\to a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	∞	$-\infty$	$-\infty$	∞
$\lim_{x\to a}(fg)(x)$	ll'	∞	$-\infty$	$+\infty$	indéterminée

Propriété :

Soit f une fonction telle que $f = \frac{g}{h}$ où g et h sont deux autres fonctions. Si g tend vers une limite non nulle et h tend vers 0 en un réel a, alors f tend vers l'infini, le signe restant à déterminer.

Exemple :

Étude des limites de $x \mapsto \frac{3x+2}{x-1}$ en 1 :
$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} 3x+2 = 5$ et $\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} x-1 = 0^+$.
$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} 3x+2 = 5$ et $\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} x-1 = 0^-$.
donc $\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{3x+2}{x-1} = +\infty$ et $\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{3x+2}{x-1} = -\infty$
D'où la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}$.

Propriétés :

$\lim_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l \in \mathbb{R}$	∞
$\lim_{x\to a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}*$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l \in \mathbb{R}$
$\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x)$	$\frac{l}{l'}$	indéterminée	0	∞

Exemple :

limite en $+\infty$ de f définie par $f(x) = \frac{4x^2+3}{x+2}$ pour $x \in]-2;+\infty]$.
On a $\lim_{x\mapsto+\infty} 4x^2+3 = +\infty$ et $\lim_{x\mapsto+\infty} x+2 = +\infty$ d'où une indétermination à lever.
$f(x) = \frac{x^2(4+\frac{3}{x^2})}{x(1+\frac{2}{x})} = \frac{x(4+\frac{3}{x^2})}{1+\frac{2}{x}}$.
Or $\lim_{x\mapsto+\infty} 4+\frac{3}{x^2} = 4$ d'où $\lim_{x\mapsto+\infty} x(4+\frac{3}{x^2}) = +\infty$.
Comme $\lim_{x\mapsto+\infty} 1+\frac{2}{x} = 1$, on a donc $\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = +\infty$.

4.2 Limites de fonctions composées

Théorème :

a, b et c désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$. Soient f et g des fonctions.
Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{X\to b} g(X) = c$ alors $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$.

Exemple :

Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par $(-3x^2+4)^4$.
On a $\lim_{x\mapsto+\infty} -3x^2+4 = -\infty$ et $\lim_{X\mapsto-\infty} X^4 = +\infty$ donc $\lim_{x\mapsto+\infty} h(x) = +\infty$.

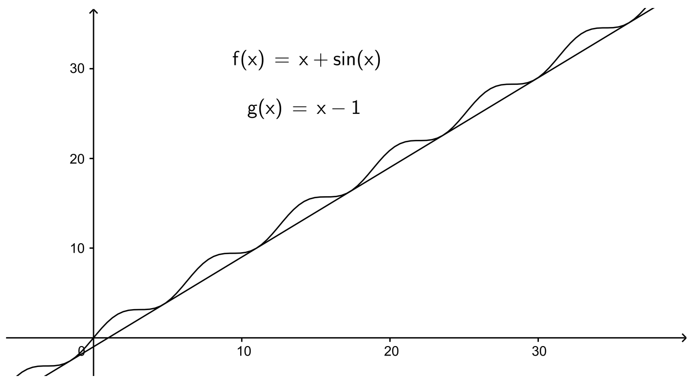
5 Comparaison et limites

Propriété :

Si f et g sont deux fonctions telles que pour x assez grand, $f(x) \geq g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Remarque :

Si pour x assez grand, $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$



Preuve :

Soit $[A; +\infty[$ avec A un nombre réel. Puisque $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, il existe x_0 tel que pour tout $x \geq x_0$, $g(x) \in [A; +\infty[$.
Comme, pour x assez grand $f(x) \geq g(x)$, il existe un réel x_1 tel que pour tout $x \geq x_1$, $f(x) \geq g(x)$. 0n en déduit que pour $x \geq max(x_0; x_1)$, $f(x) \in [A; +\infty[$ ce qui justifie que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

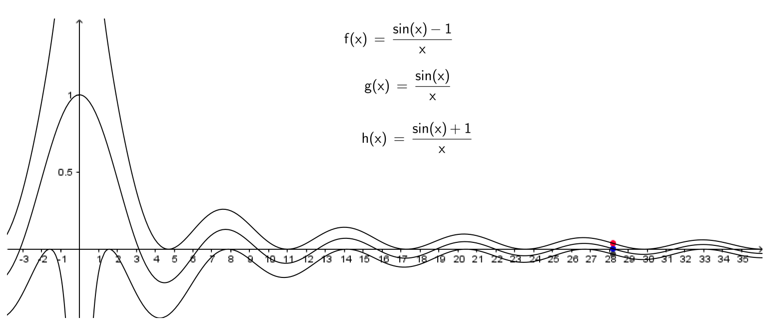
Théorème des gendarmes :

Si f, g et h sont des fonctions et l est un nombre réel tel que :
- pour x assez grand, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$;
- $\lim_{x\to+\infty} g(x) = l$ et $\lim_{x\to+\infty} h(x) = l$.

Alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$.

Preuve :

Admise



6 Limites et fonction exponentielle

Propriété :

- $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$

Preuve :

- Soit h définie sur $[0;+\infty[$ par $h(x) = e^x - x$.
  On a pour tout $x > 0$, $h'(x) = e^x - 1$.
  $h'(x) > 0$ si et seulement si $e^x - 1 > 0$ c'est à dire $e^x > 1$ donc $x > 0$.
  On en déduit que h est croissante sur $[0;+\infty[$. Comme par ailleurs $h(0) = 0$, on a donc pour tout $x > 0$, $h(x) \geq 0$ c'est à dire $e^x \geq x$.
  Comme $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, par comparaison on obtient $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.
- On pose $X = -x$. On a $\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{X\to+\infty} e^{-X} = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{e^X}$. D'après le cas précédent, $\lim_{X\to+\infty} e^X = +\infty$ donc $\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{e^X} = 0$.

Propriété (croissances comparées) :

- Pour tout entier naturel n non nul, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
- Pour tout entier naturel n, $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$

Preuves :
admises

7 Limites et fonction logarithme népérien

Propriétés :

- $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$
- Pour tout entier naturel n non nul, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$
- $\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Preuves :

- On pose $x = e^X$ pour $x > 0$.
  On a alors $\lim_{x\to+\infty} ln(x) = \lim_{X\to+\infty} \ln(e^X) = \lim_{X\to+\infty} X = +\infty$.
- On pose $x = \frac{1}{X}$ pour $x \neq 0$
  On a alors $\lim_{x\to0^+} \ln(x) = \lim_{X\to+\infty} \ln(\frac{1}{x}) = \lim_{X\to+\infty} -\ln(X) = -\infty$.
- On pose $X = \ln(x)$ ce qui équivaut à $x = \exp(X)$.
  On a alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{X\to+\infty} \frac{X}{e^{nX}} = \lim x \to +\infty \frac{1}{\frac{e^{nX}}{X}} = 0$.
- $\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x-0} = f'(0) = 1$ avec $f(x) = \ln(1+x)$ et $f'(x) = \frac{1}{1+x}$.