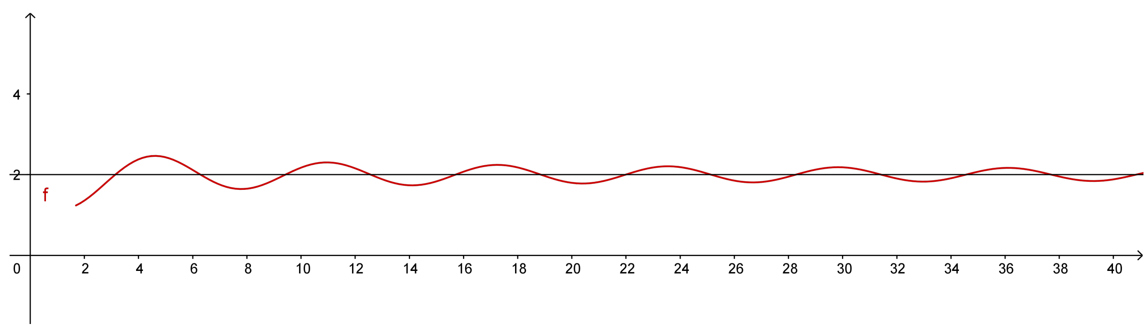
Limites de fonctions, cours, terminale, spécialité mathématiques

1 Limites finies à l'infini

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;+\infty[$ ou $]-\infty;a]$ suivant le cas avec $a \in \mathbb{R}$.

Définition :

Soit l un réel. f admet pour limite l en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si pour tout intervalle contenant l, il existe un réel x_0 tel que pour tous les réels x supérieurs à x_0 (resp. pour tous les réels x inférieurs à x_0) , $f(x)$ appartient à cet intervalle. On note alors .... (resp. ....).
On dit aussi que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$ (resp. tend vers $-\infty$).



Propriété :

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} =$ .... et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} =$ ....
- Pour tout entier naturel k non nul ,
  $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^k} =$ ....
  et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^k} =$ ....
- Pour tout réel k,
  $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-k} =$ .....
  et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-k} =$ ....
- $\lim_{x\to-\infty} e^x =$ ....

Définition :

Soit $l \in \mathbb{R}$ et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère.
On dit que la droite d'équation $y = l$ est *asymptote horizontale* à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si .... (resp. ....).

Exemples :

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} =$ ..... et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} =$ ....
donc la droite d'équation .... est une asymptote horizontale à l'hyperbole en $+\infty$ et en $-\infty$.

2 Limites infinies à l'infini

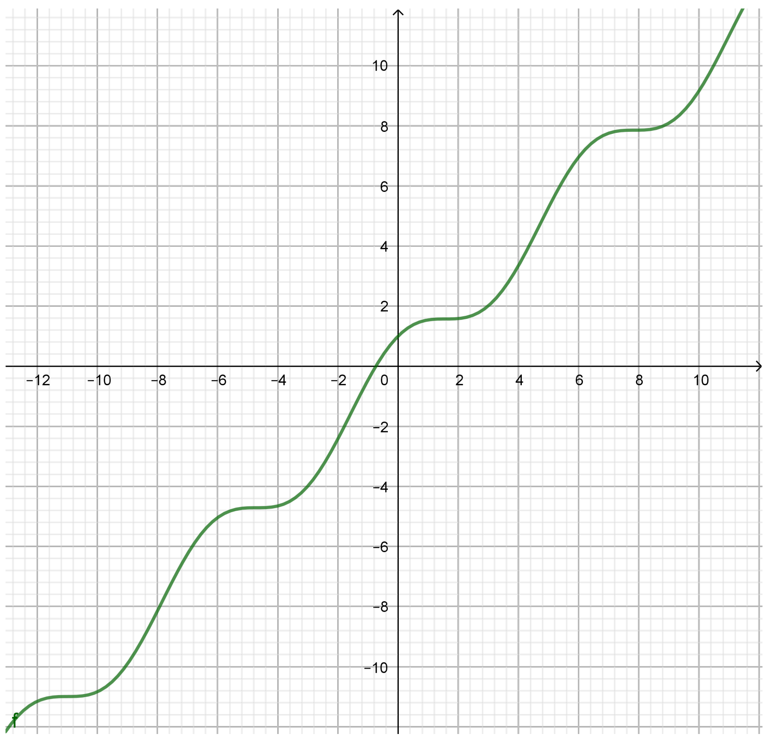
Définition :

> f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$ en $+\infty$) si pour tout intervalle $]M;+\infty[$ (resp. $]-\infty;M]$) où M est un réel, il existe un réel x_0 tel que pour tous les réels x supérieurs à x_0, $f(x) \in]M;+\infty[$ (resp. $f(x) \in]-\infty;M]$).
> On note alors .... (resp. ....).
> On dit aussi que $f(x)$ tend vers $+\infty$ (resp. tend vers $-\infty$) quand x tend vers $+\infty$.

Remarque :
On définit de même les limites en $-\infty$.

Remarque :
On définit de même les limites en $-\infty$.

Remarque :
Limites et monotonie ne sont, en général, pas liées.
On peut montrer que pour la fonction :
$f : x \mapsto x + \cos(x)$
on a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
mais que cette fonction n'est pourtant pas croissante.



Propriétés :

> - Pour tout entier naturel k non nul,$\lim_{x\to+\infty} x^k = ...$
> - $\lim_{x\to-\infty} x = ...$
> - $\lim_{x\to-\infty} x^2 = ...$
> - $\lim_{x\to-\infty} x^3 = ...$
> - $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = ...$
> - $\lim_{x\to+\infty} e^x = ...$

3 Limites en un réel

On considère dans ce paragraphe une fonction f définie sur un ensemble D_f et $a \in D_f$ où a est l'extrémité d'un intervalle de D_f.

Définition :

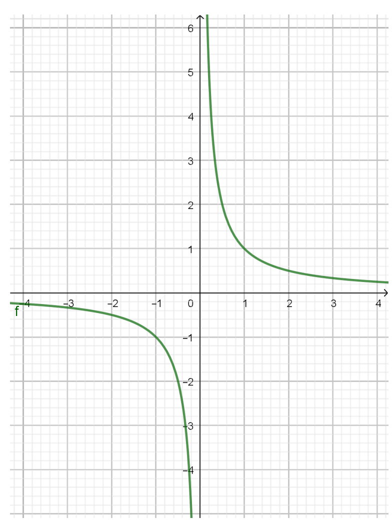
- f admet pour limite à droite $l \in \mathbb{R}$ (resp. $+\infty$) en a si pour tout intervalle $]u; v[$ contenant l il existe un réel $x_0 > a$ tel que pour tout $x \in]a; x_0[$ on a $f(x) \in]u; v[$ (resp. si pour tout intervalle $]u; +\infty[$, il existe x_0 tel que pour tout $x \in]a; x_0[$ on a $f(x) \in]u; +\infty[$).
  On note alors .... (resp. ....).
- f admet pour limite à gauche $l \in \mathbb{R}$ (resp. $+\infty$) en a si pour tout intervalle $]u; v[$ contenant l, il existe un réel $x_0 < a$ tel que pour tout $x \in]x_0; a[$ on a $f(x) \in]u; v[$ (resp. si pour tout intervalle $]u; +\infty[$, il existe x_0 tel que pour tout $x \in]x_0; a[$ on a $f(x) \in]u; +\infty[$).
  On note alors .... (resp. ....).

Définition :

Soit a un réel, $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère. On dit que la droite d'équation $x = a$ est *asymptote verticale* à $\mathcal{C}$ si ....

Exemple :

$\lim_{x \underset{>}{\to} 0} \frac{1}{x} = +\infty$
et $\lim_{x \underset{<}{\to} 0} \frac{1}{x} = -\infty$.



Définition :

On dit que f admet pour limite $+\infty$ en a lorsque pour tout intervalle de la forme $]u; +\infty[$, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez proche de a. On écrit $\lim_{x \mapsto a} f(x) = +\infty$.

Remarque :
On définit de même $\lim_{x \mapsto a} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \mapsto a} f(x) = l$ où l est un réel.

4 Opérations sur les limites

4.1 Addition, multiplication, quotient

Dans ce qui suit, a est un réel ou $a=+\infty$ ou $a=-\infty$. **Propriétés :**

$\lim_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a}(f+g)(x)$	....	....	....	....	....	....

$\lim_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}*$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{x\to a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	∞	$-\infty$	$-\infty$	∞
$\lim_{x\to a}(fg)(x)$	......	......	.....	.....	.....

Exemple :

$\lim_{x\to-\infty} 3x^2+\frac{1}{x}$:
$\lim_{x\to-\infty} 3x^2 =$....
et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} =$....
Donc par somme $\lim_{x\to-\infty} 3x^2+\frac{1}{x} =$...

$\lim_{x\to-\infty} 2x^2+3x+5$:
Il y a une indéterminée à lever. $2x^2+3x+5 =$.....
$\lim_{x\to-\infty}$ ....
et $\lim_{x\to-\infty}$ ....
D'où par produit .....

Propriété :

> Soit f une fonction telle que $f=\frac{g}{h}$ où g et h sont deux autres fonctions. Si g tend vers .... et h tend vers 0 en un réel a, alors f tend vers .... , le signe restant à déterminer.

Exemple :

Étude des limites en 1 de $x \mapsto \frac{3x+2}{x-1}$:
$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} 3x+2 =$ .... et $\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} x-1 =$ ......
$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} 3x+2 =$ ..... et $\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} x-1 =$ ......
donc $\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{3x+2}{x-1} =$ .... et $\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{3x+2}{x-1} =$ ......
D'où la droite d'équation .... est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}$.

Propriétés :

$\lim_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}^*$	0	∞
$\lim_{x\to a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}*$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	0	0	$l \in \mathbb{R}^*$
$\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x)$	....	....	.....	....	....	......

Exemple :

limite en $+\infty$ de f définie par $f(x) = \frac{4x^2+3}{x+2}$ pour $x \in]-2; +\infty]$.
On a $\lim_{x\mapsto +\infty} 4x^2 + 3 =$.... et $\lim_{x\mapsto +\infty} x + 2 =$.... d'où une indétermination à lever.
Or $f(x) =$ ....

On a $\lim_{x\mapsto +\infty} 4 + \frac{3}{x^2} =$.... d'où $\lim_{x\mapsto +\infty} x(4 + \frac{3}{x^2}) =$....
Comme $\lim_{x\mapsto +\infty} 1 + \frac{2}{x} =$...., on a donc $\lim_{x\mapsto +\infty} f(x) =$.....

4.2 Limites de fonctions composées

Théorème :

a, b et c désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$. Soient f et g des fonctions. Si $\lim_{x\to .....} f(x) =$ ..... et $\lim_{X\to ....} g(X) =$ ..... alors $\lim_{x\to ....} g(f(x)) =$ .....

Exemple :

Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par $(-3x^2 + 4)^4$.
On a $\lim_{x\mapsto +\infty} -3x^2 + 4 =$ ...... et $\lim_{X\mapsto -\infty} X^4 =$ ......
donc $\lim_{x\mapsto +\infty} h(x) =$ ......

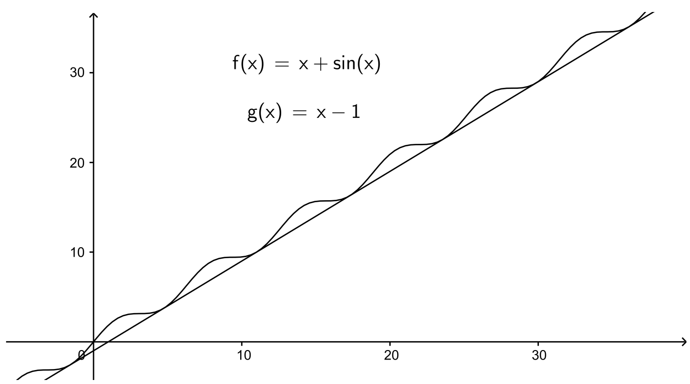
5 Comparaison et limites

Théorème de comparaison :

> Si f et g sont deux fonctions telles que pour x assez grand, $f(x) \geq g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) =$ .... alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$ ....

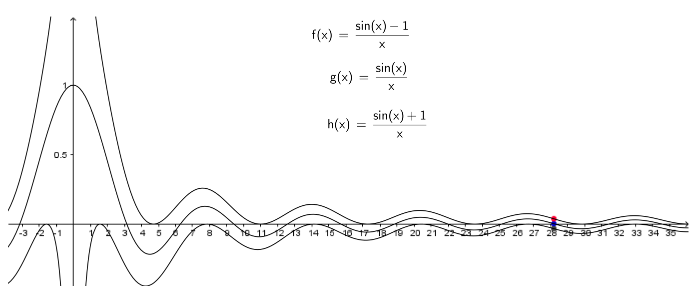
Remarque :
Si pour x assez grand, $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim_{x\to+\infty} g(x) =$ ...... alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$ ....

Preuve :
Soit $[A; +\infty[$ avec A un nombre réel. Puisque $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, il existe x_O tel que pour tout $x \geq x_0$, ...
Comme, pour x assez grand $f(x) \geq g(x)$, on en déduit que pour x assez grand .... ce qui justifie que $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$.......



Théorème des gendarmes :

> Si f, g et h sont des fonctions et l est un nombre réel tel que :
> - pour x assez grand, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$;
> - $\lim_{x\to+\infty} g(x) =$ .... et $\lim_{x\to+\infty} h(x) =$ .....
>
> Alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$ .....



Remarque :
Les deux théorèmes précédents restent valident pour x tendant vers $-\infty$ et x tendant vers un réel.

6 Limite et fonction exponentielle

Propriété :

- $\lim_{x\to+\infty} e^x =$ ......
- $\lim_{x\to-\infty} e^x =$ .....

Preuve :

- Soit h définie sur $[0;+\infty[$ par $h(x) =$......... .
  On a pour tout $x > 0$, $h'(x) =$...... .
  $h'(x) > 0$ si et seulement si .... c'est à dire $x >$ ....
  On en déduit que h est .... sur .... Comme par ailleurs $h(0) =$ ...., on a donc pour tout $x > 0$, $h(x)$...... c'est à dire ....
  Comme $\lim_{x\to+\infty} x =$ ......, par comparaison on obtient $\lim_{x\to+\infty} e^x =$ ....
- On pose $X =$ ...... On a $\lim_{x\to-\infty}$ ..... $= \lim_{X\to+\infty}$ .... $= \lim_{X\to+\infty}$ .... D'après le cas précédent, $\lim_{X\to+\infty}$ .... $=$ .... donc $\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{e^X} =$ ......

Propriété (croissances comparées) :

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} =$ ....
- $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} =$ ....
- $\lim_{x\to-\infty} xe^x =$ ......
- Pour tout entier naturel k non nul,
  $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^k} =$ ....
  et $\lim_{x\to-\infty} x^k e^x =$ ......

7 Application à la définition de la continuité d'une fonction

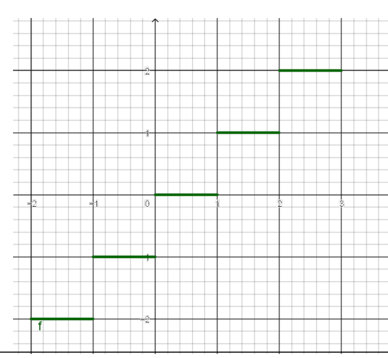
7.1 Notion de continuité

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un nombre réel de I.

- La fonction f est dite *continue en a* si elle admet en a une limite et ci cette limite est égale à .... , c'est à dire si ....
  .
- f est dite *continue sur I* si elle est continue en tout réel $a \in I$.

Exemple : la fonction partie entière notée E :
On appelle fonction partie entière la fonction sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $E(x)$ est l'unique entier n tel que $n \leq x < n+1$ La fonction E est continue sur tout intervalle de la forme $]n;n+1[$ où n est un entier relatif mais pas en n.



7.2 Généralisation du théorème des valeurs intermédiaires à des intervalles quelconques

Propriété :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Le théorème des valeurs intermédiaires admet, entre autres, les généralisations suivantes :

- Si $I = [a; +\infty[$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors pour tout réel $k \geq f(a)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a; +\infty[$. Si, de plus, f est strictement croissante, alors il y a unicité de la solution.
- Si $I = [a; b[$ et $\lim_{x\to b} f(x) = l$ alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et l l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a; b[$. Si de plus f est strictement croissante, alors il y a unicité de la solution.
- Si $I = [-\infty; b[$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ et $\lim_{x\to b} f(x) = -\infty$ alors pour tout réel $k < l$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]-\infty; b[$. Si de plus, f est strictement décroissante, alors il y a unicité de la solution.

x	a		c		$+\infty$
					$+\infty$
				$\nearrow$	
f			k		
		$\nearrow$			
	$f(a)$				

x	a		c		b
				l	$\|\|$
				$\nearrow$	$\|\|$
f			k		$\|\|$
		$\nearrow$			$\|\|$
	$f(a)$				$\|\|$

x	$-\infty$		c		b
	l				$\|\|$
		$\searrow$			$\|\|$
f			k		$\|\|$
				$\searrow$	$\|\|$
				$-\infty$	$\|\|$

Exemple :

Étude du nombre de solution de l'équation $x^5 = k$ où k est un réel fixé :

Soit f définie par $f(x) = x^5$ sur $]-\infty; +\infty[$.

- f est .... donc continue sur $]-\infty; +\infty[$;
- pour tout réel x, $f'(x) =$............... donc $f'(x)$.....0 et $f'(x)$....0 pour tout réel x non nul donc f est .... sur $]-\infty; +\infty[$;
- $\lim_{x\to+\infty} x^5 =$...... et $\lim_{x\to-\infty} x^5 =$....... .

Donc d'après une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $x^5 = k$ admet .... sur $\mathbb{R}$.