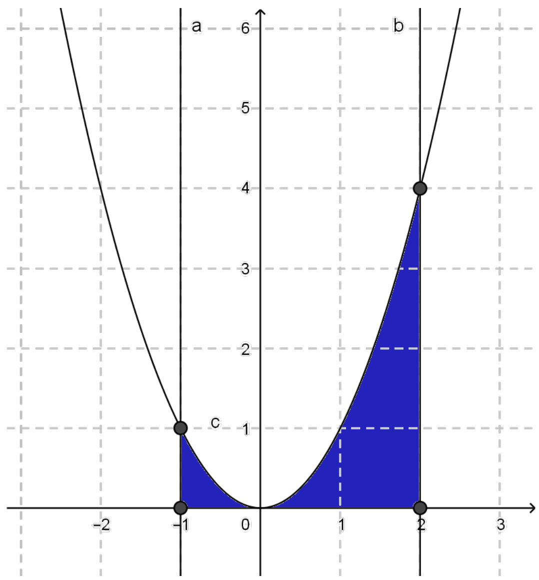
Intégration, cours, terminale, spécialité mathématiques

1 Intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle

Définition :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. ortogonal. On appelle *intégrale* de a à b de la fonction f l'aire ....
....
....
On note .... cette aire.



Remarques :

- Pour toute fonction continue et positive sur $[a;b]$, on a $\int_a^b f(t)dt \geq$ .... ;
- Si $b = a$, on a $\int_a^a f(t)dt =$ .... ;

Relation de Chasles :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $I = [a;c]$ et b un réel de I. Alors :

....

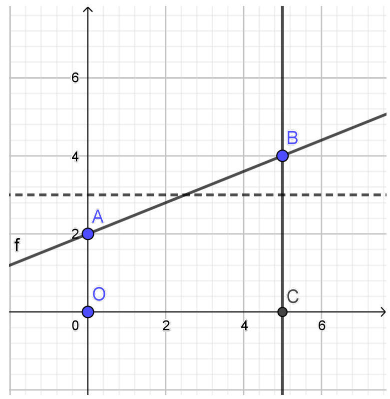
Propriété de conservation de l'ordre :

Soient f et g deux fonctions continues et positives sur $[a;b]$ telles que pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \leq g(x)$.
Alors ....

Définition :

On appelle *valeur moyenne* de f sur $[a;b]$, le réel

$$\mu = \ldots\ldots\ldots\ldots$$



Remarque :
Si f est positive sur $[a;b]$, la valeur moyenne s'interprète géométriquement comme la hauteur du rectangle de côté $b-a$ et de même aire que l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de la fonction, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

2 Primitive d'une fonction continue sur un intervalle

Définition :

Une fonction F dérivable sur un intervalle I et de dérivée .... est appelée *primitive* de f sur I.

Exemple :
$F : x \mapsto$ .... est une primitive de $f : x \mapsto x$ car $F'(x) = x$ pour tout réel x.

Propriété :

Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I. Alors f admet une infinité de primitives : G est une primitve de f si et seulement si ....

Exemple :
$F_1 : x \mapsto \frac{x^2}{2} - 4$ et $F_2 : x \mapsto \frac{x^2}{2} + 2,5$ sont deux primitives de $x \mapsto$ ....

Propriété :

Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I. Soit a appartenant à I et b un réel. Alors il existe une et une seule primitive F telle que ....

Exemple :
Il existe une unique primitive F de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = 2$. En effet, on a vu que les primitives sont de la forme $x \mapsto$ .... où k est un réel. $F(1) = 2$ impose donc .... d'où ....
.

Propriété :

> Toute fonction f continue et positive sur un intervalle I admet des primitives sur I.

3 Calcul de primitives

3.1 Primitives de fonctions de référence

Exemples fondamentaux :

f définie sur I par	primitives F de f sur I	intervalle I
0	....	$\mathbb{R}$
1	....	$\mathbb{R}$
x	....	$\mathbb{R}$
x^2	....	$\mathbb{R}$
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	....	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	....	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	....	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{x^2}$	....	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$\frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$	....	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$\sin(x)$	....	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	....	$\mathbb{R}$
e^x	....	$\mathbb{R}$

3.2 Primitives de fonctions composées

Exemples fondamentaux :

f définie sur I par	Primitives F de f sur I	intervalle I
$u'u$	....	$\mathbb{R}$
$u'u^n, n \in \mathbb{N}$	....	$\mathbb{R}$
$\frac{u'}{u^2}$	....	I tel que u ne s'annule pas sur I
$\frac{u'}{u^n}$	....	I tel que u ne s'annule pas sur I
$u'e^u$	....	$\mathbb{R}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	....	I tel que $u > 0$
$\frac{u'}{u}$	....	I tel que $u > 0$

4 Lien entre intégrale et primitives

Théorème :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. La fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée ....

Propriété :

Si f est continue et positive sur un intervalle $[A;b]$ alors

$$\int_a^b f(t)dt = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

où F est une primitive quelconque de f sur $[a;b]$.

5 Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. La fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée ....

Propriété :

Toute fonction f continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Définition :

Pour toute fonction f continue sur un intervalle I et pour tous les réels a et b de I, on définit l'intégrale de a à b de f par

$$\int_a^b f(t)dt = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Propriété (relation de Chasles) :

Soit f une fonction continue sur I et a, b et c trois réels de I. Alors :

....

Preuve :
Soit F une primitive de f. On a

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \int_a^c f(x)\,dx\end{aligned}$$

Conséquences :

Avec les mêmes hypothèses que précédemment,
- $\int_a^a f(x)\,dx = \ldots\ldots$
- $\int_b^a f(x)\,dx = \ldots\ldots\ldots$

Preuve :
D'une part, $\int_a^a f(x)\,dx = \ldots\ldots\ldots$ et d'autre part, $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx$ d'où les deux résultats.

Propriété de linéarité de l'intégrale :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ et k un réel. Alors

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et

$$\int_a^b kf(x)\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Preuve :
Soients F et G des primitives de f et g respectivement. Alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ car $(F+G)' = F' + G' = \ldots\ldots\ldots$ et on a $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx =$............. ....

De même, kF est une primitive de kf et $\int_a^b kf(x)\,dx =$........... ....

Propriété de positivité de l'intégrale :

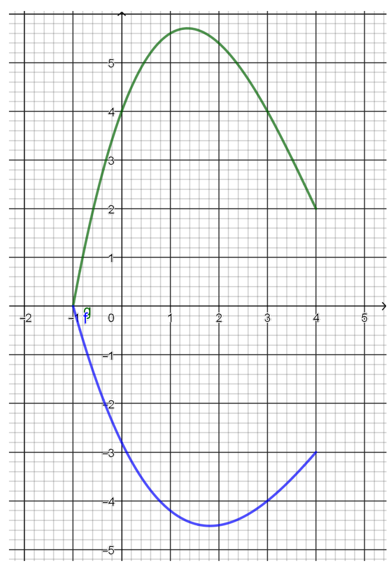
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
- Si pour tout réel x de I, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq \ldots$;
- si pour tout réel x de $[a;b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \ldots \int_a^b g(x)\,dx$.

Preuve :

- Si f est positive, alors, $\int_a^b f(x)\,dx$ est l'aire de la partie de plan comprise entre les droites d'équation $x=a$, $x=b$, $y=0$ et la courbe $\mathcal{C}_f$ donc est positive.
- Si pour tout x réel de $[a;b]$, $f(x) \leq g(x)$ implique $f(x)-g(x)$.....0 c'est à dire que $f-g$ est .... D'où $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$.....0 d'après le point précédent ce qui s'écrit encore $\int_a^b f(x)\,dx$....... $\int_a^b g(x)\,dx$.

Propriété :

- Si f est continue et négative sur $[a;b]$, l'aire exprimée en unités d'aire de la surface plane délimitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est égale à $-\int_a^b f(x)dx$.
- Si f et g sont deux fonctions continues positives sur $[a;b]$ telles que $f \leq g$, alors l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface comprise entre les deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est égale à $\int_a^b g(x) - f(x)dx$.



Définition :

On appelle *valeur moyenne* de f sur $[a;b]$, le réel

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

6 Intégration par parties

Théorème :

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I. On suppose que leurs fonctions dérivées u' et v' sont continues sur I. Alors, pour tous les nombres réels a et b de I :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Preuve :
u et v sont dérivables sur I, donc le produit uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + v'u$.
Les fonctions u, v, u' et v' étant continues sur I, la fonction $u'v + v'u$ l'est aussi.
Alors $\int_a^b (uv)'(x)dx = \int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$ d'après la propriété de linéarité de l'intégrale.
La fonction uv est évidemment une primitive de la fonction $(uv)'$, donc $\int_a^b (uv)'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b$.
On obtient $[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$.

Exemple [Utilisation d'une intégration par parties] :
Cherchons la primitive de $f : t \mapsto \ln(t)$ qui s'annule en 1.
On pose $u(t) = \ln(t)$ et $v'(t) = 1$. On a donc $u'(t) = \frac{1}{t}$ et on peut poser $v(t) = t$.
On a alors $\int_1^x 1\ln(t)dt = [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t}tdt = x\ln(x) - 1\ln(1) - \int_1 xdt = x\ln(x) - [t]_1^x = x\ln(x) - x + 1$.