Calcul intégral, cours, Terminale S

F.Gaudon

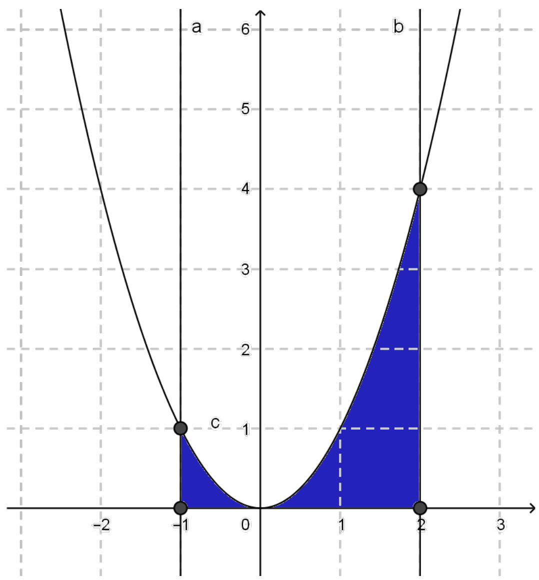
14 mars 2021

Table des matières

1 Intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle

Définition :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. ortogonal. On appelle *intégrale* de a à b de la fonction f la mesure de l'aire en unité d'aire de la partie $\mathcal{A}$ du plan délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ et la courbe $\mathcal{C}$.
On note $\int_a^b f(t)dt$ cette aire.



Remarques :

- Pour toute fonction continue et positive sur $[a;b]$, on a $\int_a^b f(t)dt \geq 0$;
- Si $b = a$, on a $\int_a^a f(t)dt = 0$;

Relation de Chasles :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $I = [a;c]$ et b un réel de I. Alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

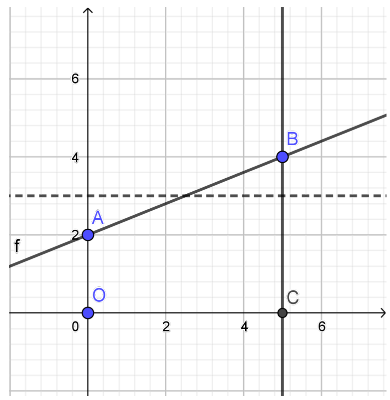
Propriété de conservation de l'ordre :

Soient f et g deux fonctions continues et positives sur $[a;b]$ telles que pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \leq g(x)$.
Alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

Définition :

On appelle *valeur moyenne* de f sur $[a;b]$, le réel

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx$$



Remarque :
Si f est positive sur $[a;b]$, la valeur moyenne s'interprète géométriquement comme la hauteur du rectangle de côté $b-a$ et de même aire que l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de la fonction, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

2 Primitives d'une fonction continue sur un intervalle

Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Une fonction F dérivable sur un intervalle I et de dérivée $F'=f$ est appelée *primitive* de f sur I.

Exemple :
$F : x \mapsto \frac{x^2}{2}$ est une primitive de $f : x \mapsto x$ car $F'(x) = x$ pour tout réel x.

Propriété :

Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I. Alors f admet une infinité de primitives : G est une primitive de f si et seulement si il existe un réel k tel que pour tout réel x, $G(x) = F(x) + k$.

preuve :
Si F et G sont deux primitives de f sur I alors $(F-G)' = F' - G' = f - f = 0$ donc $F-G$ est une constante k.

Exemple :
$F_1 : x \mapsto \frac{x^2}{2} - 4$ et $F_2 : x \mapsto \frac{x^2}{2} + 2,5$ sont deux primitives de $x \mapsto x$.

Propriété :

Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I. Soit a appartenant à I et b un réel. Alors il existe une et une seule primitive G telle que $G(a) = b$.

preuve :
On a vu qu'il existe une constante k telle que pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + k$. D'où $G(a) = b$ si et seulement si $F(a) + k = b$ c'est à dire $k = b - F(a)$.

Exemple :
Il existe une unique primitive F de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = 2$. En effet, on a vu que les primitives sont de la forme $x \mapsto \frac{x^2}{2} + k$ où k est un réel. $F(1) = 2$ impose donc $\frac{1}{2} + k = 2$ d'où $k = \frac{3}{2}$.

Propriété :

Toute fonction f continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Preuve :
Admis

3 Calcul de primitives

3.1 Primitives de fonctions de référence

Exemples fondamentaux :

f définie sur I par	primitives F de f sur I	intervalle I
0	$C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
1	$x + C$, $C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{x^2}{2} + C$, $C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x^2	$\frac{x^3}{3} + C$, $C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x} + C$, $C \in \mathbb{R}$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + C$, $C \in \mathbb{R}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$\frac{1}{x^n}$, $n \geq 2$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C, C \in \mathbb{R}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
e^x	$e^x + C$, $C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

3.2 Primitives de fonctions composées

Exemples fondamentaux :

f définie sur I par	Primitives F de f sur I	intervalle I
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$u'u^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + C$, $C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + C$, $C\mathbb{R}$	I tel que u ne s'annule pas sur I
$\frac{u'}{u^n}$, $n \in \mathbb{N} - 0; 1$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + C$, $C \in \mathbb{R}$	I tel que u ne s'annule pas sur I
$u'e^u$	$e^u + C$, $C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C$, $C \in \mathbb{R}$	I tel que $u > 0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u + C$, $C \in \mathbb{R}$	I tel que $u > 0$

3.3 Lien entre intégrale et primitives

Théorème :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. La fonction F définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a; b]$ et a pour dérivée f. F est donc l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Preuve (cas où f est croissante) :
Pour tout $x_0 \in [a; b]$, $F(x)$ est l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ entre a et x_0. Soit $h > 0$ tel que $x_0 + h$ appartient à $[a; b]$. On a $F(x_0 + h) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt$.
$F(x_0 + h) - F(x_0)$ est l'aire sous la courbe comprise entre l'axe (Ox) et les droites d'équation $x = x_0$ et $x = x_0 + h$.
Cette aire est comprise entre l'aire du rectangle de hauteur $f(x_0)$ et de largeur h et l'aire du rectangle de hauteur $f(x_0 + h)$ et de largeur h.
D'où

$$h \times f(x_0) \leq F(x_0 + h) - F(x_0) \leq h \times f(x_0 + h)$$

et

$$f(x_0) \leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$$

. Or f est continue en x_0 d'où $\lim_{h \to 0, h>0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ et d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{h \to 0, h>0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

Par le même raisonnement on montre que

$$\lim_{h \to 0, h<0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

ce qui montre que F est dérivable en x_0 de nombre dérivé $f(x_0)$ et ceci pour tout x_0 de $[a; b]$.

Propriété :

Si f est continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ alors

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive quelconque de f sur $[a;b]$. On note alors :

$$\int_a^b f(t)dt = [F(x)]_a^b$$

Exemple :
$\int_1^2 x^2 dx = [\frac{x^3}{3}]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$.

4 Intégrale d'une fonction de signe quelconque

Théorème :

Toute fonction continue sur un intervalle $I = [a;b]$ admet une primitive sur I.

Théorème et définition :

Pour toute fonction f continue sur un intervalle I et pour tous les réels a et b de I, on définit l'intégrale de a à b de f par

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f sur $[a;b]$.

Preuve :
Soit F_1 et F_2 deux primitives de f. Alors il existe un réel C tel que $F_2 = F_1 + C$. $F_2(b) - F_2(a) = F_1(b) + C - (F_1(a) + C) = F_1(b) - F_1(a)$.

Notation :

On note aussi $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$.

Exemple :
$\int_0^1 \frac{-5x}{x^2+3}dx = \int_0^1 \frac{-5}{2}\frac{2x}{x^2+3}dx = [\frac{-5}{2}\ln(x^2+3)]_0^1$
$= \frac{-5}{2}\ln(1^2+3) - \frac{-5}{2}\ln(0^2+3) = \frac{-5}{2}\ln(4) - \frac{-5}{2}\ln(3) = \frac{-5}{2}\ln(\frac{4}{3})$

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. La fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée f.

Propriété (relation de Chasles) :

Soit f une fonction continue sur I et a, b et c trois réels de I. Alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx$$

Preuve :

Soit F une primitive de f. On a

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx &= F(b)-F(a)+F(c)-F(b)\\ &= F(c)-F(a)\\ &= \int_a^c f(x)\,dx\end{aligned}$$

Conséquences :

Avec les mêmes hypothèses que précédemment,

- $\int_a^a f(x)\,dx=0$
- $\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$

Preuve :

D'une part, $\int_a^a f(x)\,dx=F(a)-F(a)=0$ et d'autre part, $\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^a f(x)\,dx=\int_a^a f(x)\,dx$ d'où les deux résultats.

Propriété de linéarité de l'intégrale :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ et k un réel. Alors

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$$

et

$$\int_a^b kf(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$$

Preuve :
Soient F et G des primitives de f et g respectivement.
Alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ car $(F+G)'=F'+G'=f+g$
et on a $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx=(F+G)(b)-(F+G)(a)=F(b)+G(b)-F(a)-G(a)=F(b)-F(a)+G(b)-G(a)=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g()x\,dx$.
De même, kF est une primitive de kf et $\int_a^b kf(x)\,dx=kF(b)-kF(a)=k(F(b)-F(a))=k\int_a^b f(x)\,dx$

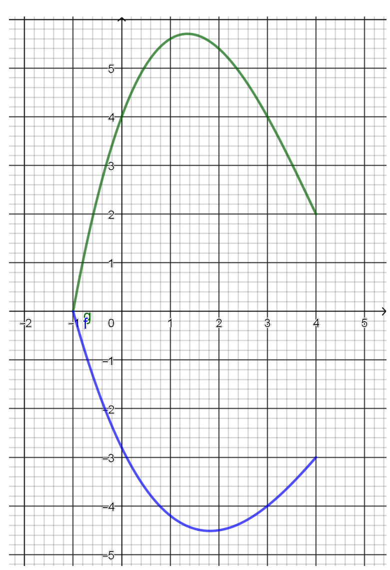
Propriété de positivité de l'intégrale :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
- Si pour tout réel x de I, $f(x)\geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx\geq 0$;
- si pour tout réel x de $[a;b]$, $f(x)\leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx\leq \int_a^b g(x)\,dx$.

Preuve :
- Si f est positive, alors, $\int_a^b f(x)\,dx$ est l'aire de la partie de plan comprise entre les droites d'équation $x=a$, $x=b$, $y=0$ et la courbe $\mathcal{C}_f$ donc est positive.
- Si pour tout x réel de $[a;b]$, $f(x)\leq g(x)$ implique $g(x)-f(x)\geq 0$ c'est à dire que $g-f$ est positive. D'où $\int_a^b (g(x)-f(x))\,dx\geq 0$ d'après le point précédent ce qui s'écrit encore $\int_a^b g(x)\,dx\geq \int_a^b f(x)\,dx$.

Propriété :

- Si f est continue et négative sur $[a;b]$, l'aire exprimée en unités d'aire de la surface plane délimitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est égale à $-\int_a^b f(x)dx$.
- Si f et g sont deux fonctions continues positives sur $[a;b]$ telles que $f\leq g$, alors l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface comprise entre les deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est égale à $\int_a^b g(x)-f(x)dx$.



Définition :

On appelle *valeur moyenne* de f sur $[a;b]$, le réel

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

5 Intégration par parties

Théorème :

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I. On suppose que leurs fonctions dérivées u' et v' sont continues sur I. Alors, pour tous les nombres réels a et b de I :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Preuve :
u et v sont dérivables sur I, donc le produit uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + v'u$.
Les fonctions u, v, u' et v' étant continues sur I, la fonction $u'v + v'u$ l'est aussi.
Alors $\int_a^b (uv)'(x)dx = \int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$ d'après la propriété de linéarité de l'intégrale.
La fonction uv est évidemment une primitive de la fonction $(uv)'$, donc $\int_a^b (uv)'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b$.
On obtient $[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$.

Exemple [Utilisation d'une intégration par parties] :
Cherchons la primitive de $f : t \mapsto \ln(t)$ qui s'annule en 1.
On pose $u(t) = \ln(t)$ et $v'(t) = 1$. On a donc $u'(t) = \frac{1}{t}$ et on peut poser $v(t) = t$.
On a alors $\int_1^x 1\ln(t)dt = [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t}tdt = x\ln(x) - 1\ln(1) - \int_1 xdt = x\ln(x) - [t]_1^x = x\ln(x) - x + 1$.