Fonctions trigonométriques, cours, terminale S

1 Fonctions trigonométriques

Définition :

- La fonction *cosinus* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto$ ....
- La fonction *sinus* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto$ ....

Propriété :

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

- $\sin'(x) =$ .... ;
- $\cos'(x) =$ .....

Preuve :
admise

Définitions et propriétés :

- Soit T un réel. On dit qu'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est *périodique de période* T si pour tout réel x, ...
- On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I symétrique par rapport à 0 est *paire* si pour tout réel $x \in I$, ...
  Dans un repère orthogonal du plan, la courbe représentative d'une fonction paire est ....
- On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I symétrique par rapport à 0 est *impaire* si pour tout réel ....
  Dans un repère du plan, la courbe représentative d'une fonction impaire est ....

Propriétés :

- Pour tout x réel, $\cos(x+2\pi)$ =......... et $\sin(x+2\pi)$ =.......... . Les fonctions cosinus et sinus sont des fonctions .... de ....
- Pour tout réel x, $\cos(-x)$ =........... . La fonction cosinus est une fonction ....
- Pour tout réel x, $\sin(-x)$ =........... . La fonction sinus est une fonction ....

Exemple :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \cos(4x)$.
Pour tout réel x, $f(-x)$ =....
donc f est une fonction ....
Pour tout réel x, $f(x+\frac{\pi}{2})$ =.....
donc f est ....

2 Étude des fonctions cosinus et sinus sur $[0;\pi]$

2.1 Fonction cosinus

Signe :

x	0	....	π
$\cos(x)$	.....	....	.....

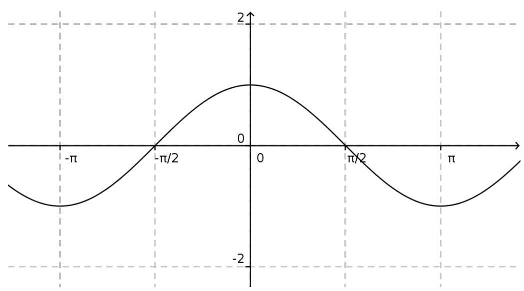
Variations :

x	0	.....	π
$\cos x$	....		
	......		
		....	
		....	
			....

Preuve des variations :
Pour tout $x \in [0;\pi]$, $\cos'(x) =$ .... Pour tout $x \in]0;\pi[$ $\sin(x) >$ ..... donc $\cos'(x)$.......... et la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0;\pi]$.

Représentation graphique :

La représentation graphique de la fonction cosinus est appelée ....



2.2 Fonction sinus

Signe :

x	0	....		π
$\sin(x)$	....	....	.....	.....

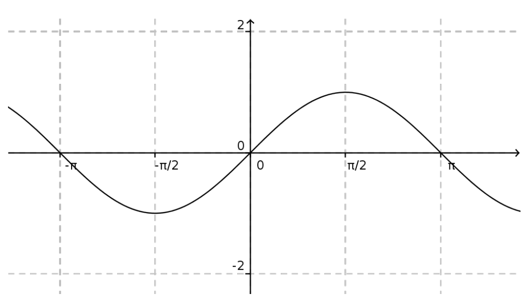
Variations :

x	0	.....	π
$\sin(x)$		....	
	......		......
	....		....

Preuve :
Pour tout $x \in [0;\pi]$, $\sin'(x) =$ .... Pour tout $x \in]0;\frac{\pi}{2}[$, $\cos(x)$..... et pour tout $x \in]\frac{\pi}{2};\pi[$, $\cos(x)$..... donc la fonction sinus et strictement .... sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ et strictement .... sur $[\frac{\pi}{2};\pi]$.

Représentation graphique :

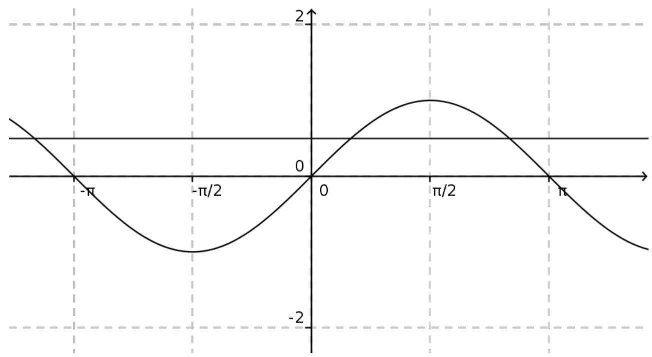
La représentation graphique de la fonction sinus est appelée *sinusoïde*.



3 Applications

3.1 Résolution d'inéquations trigonométriques

Exemple :
Résolution de l'inéquation $\sin(x) \geq \frac{1}{2}$ sur $[0; \pi]$.
On sait que l'équation $\sin(x) = \frac{1}{2}$ a pour solutions sur $\mathbb{R}$, ... avec k_1 et k_2 entiers relatifs.
Les solutions sur $[0; \pi]$ sont donc ....
D'après les variations de la fonction sinus sur $[0; \pi]$, l'inéquation $\sin(x) \geq \frac{1}{2}$ a donc pour ensemble de solutions .... sur $[0; \pi]$.



3.2 Exemple d'étude de fonctions

Exemple :
Soit f la fonction définie sur $[0; \pi]$ par $f(x) = \frac{x}{2} - \sin(x)$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, ...
$f'(x) \geq 0$ équivaut à .... c'est à dire ....
On sait que $\cos(x) = \frac{1}{2}$ a pour solutions .... sur $\mathbb{R}$ où k_1 et k_2 sont des entiers relatifs.
Donc sur $[0; \pi]$, l'unique solution est ....
Par lecture du cercle trigonométrique, l'inéquation $\cos(x) \leq \frac{1}{2}$ a pour ensemble de solutions ....
Par conséquent, on a le tableau de variations suivant :

x	0		....		π
$f'(x)$		.....	0	.....	
$f(x)$		....		....	
			....