Fonctions trigonométriques, cours, terminale, spécialité mathématiques

F.Gaudon

26 février 2020

Table des matières

1 Fonctions trigonométriques

Définition :

- La fonction *cosinus* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \cos(x)$.
- La fonction *sinus* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \sin(x)$.

Propriété :

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

- $\sin'(x) = \cos(x)$;
- $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Définitions :

- On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I symétrique par rapport à 0 est *paire* si pour tout $x \in I$, $f(-x) = f(x)$ c'est à dire si sa courbe représentative dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I symétrique par rapport à 0 est *impaire* si pour tout $x \in I$, $f(-x) = -f(x)$ c'est à dire si sa courbe représentative dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- On dit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est *périodique* de période T si pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$.

Propriétés :

- Pour tout x réel, $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$. Les fonctions cosinus et sinus sont des fonctions *périodiques* de période 2π.
- Pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$. La fonction cosinus est une fonction *paire*.
- Pour tout réel x, $\sin(-x) = -\sin(x)$. La fonction sinus est une fonction *impaire*.

Exemple :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \cos(4x)$.
Pour tout réel x, $f(-x) = \cos(-4x) = \cos(4x) = f(x)$ donc f est une fonction paire.
Pour tout réel x, $f(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(4(x + \frac{\pi}{2})) = \cos(4x + 2\pi) = \cos(4x) = f(x)$ donc f est périodique de période $\frac{\pi}{2}$.

2 Étude des fonctions cosinus et sinus sur $[0;\pi]$

2.1 Fonction cosinus

Signe :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos(x)$		$+$	0	-	

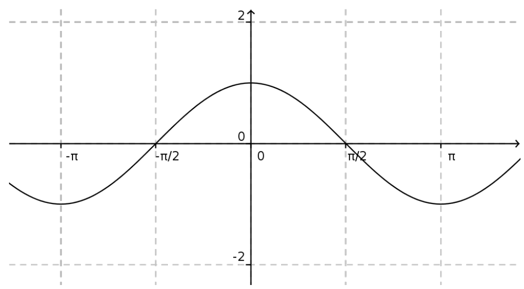
Variations :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$	1				
		$\searrow$			
			0		
				$\searrow$	
					-1

Preuve des variations :
Pour tout $x \in [0;\pi]$, $\cos'(x) = -\sin(x)$. Pour tout $x \in]0;\pi[$ $\sin(x) > 0$ donc $\cos'(x) < 0$ et la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0;\pi]$.

Représentation graphique :

La représentation graphique de la fonction cosinus est appelée *cosinusoïde*.



2.2 Fonction sinus

Signe :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin(x)$	0	$+$		$+$	0

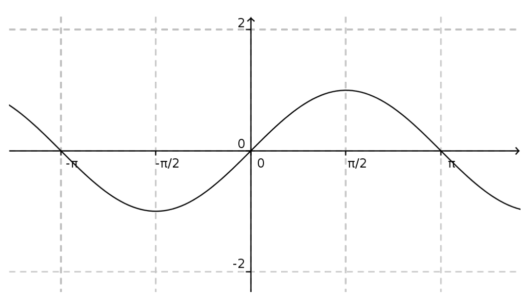
Variations :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin(x)$			1		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0

Preuve :
Pour tout $x \in [0;\pi]$, $\sin'(x) = \cos(x)$. Pour tout $x \in]0;\frac{\pi}{2}[$, $\cos(x) > 0$ et pour tout $x \in]\frac{\pi}{2};\pi[$, $\cos(x) < 0$ donc la fonction sinus et strictement croissante sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{\pi}{2};\pi]$.

Représentation graphique :

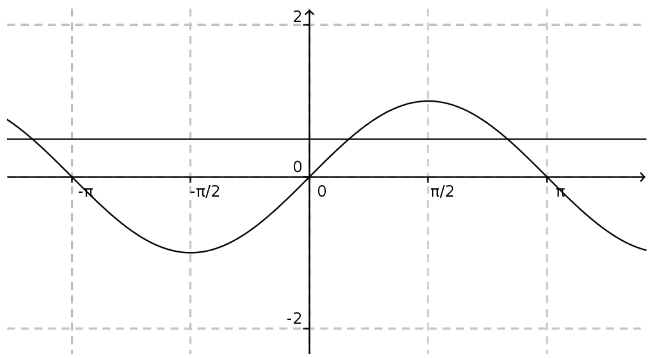
La représentation graphique de la fonction sinus est appelée *sinusoïde*.



3 Applications

3.1 Résolution d'inéquations trigonométriques

Exemple :
Résolution de l'inéquation $\sin(x) \geq \frac{1}{2}$ sur $[0; \pi]$.
On sait que l'équation $\sin(x) = \frac{1}{2}$ a pour solutions sur $\mathbb{R}$, $\frac{\pi}{6} + 2k_1\pi$ et $\pi - \frac{\pi}{6} + 2k_2\pi$ avec k_1 et k_2 entiers relatifs.
Les solutions sur $[0; \pi]$ sont donc $\frac{\pi}{6}$ et $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.
D'après les variations de la fonction sinus sur $[0; \pi]$, l'inéquation $\sin(x) \geq \frac{1}{2}$ a donc pour solutions $[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}]$ sur $[0; \pi]$.



3.2 Exemple d'étude de fonctions

Exemple :
Soit f la fonction définie sur $[0; \pi]$ par $f(x) = \frac{x}{2} - \sin(x)$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = \frac{1}{2} - \cos(x)$.
$f'(x) \geq 0$ équivaut à $\frac{1}{2} - \cos(x) \geq 0$ c'est à dire $\frac{1}{2} \geq \cos(x)$
On sait que $\cos(x) = \frac{1}{2}$ a pour solutions $\frac{\pi}{3} + 2k_1\pi$ et $-\frac{\pi}{3} + 2k_2\pi$ sur $\mathbb{R}$ où k_1 et k_2 sont des entiers relatifs.
Donc sur $[0; \pi]$, l'unique solution est $\frac{\pi}{3}$.
Par lecture du cercle trigonométrique, l'inéquation $\cos(x) \leq \frac{1}{2}$ a pour solutions $[\frac{\pi}{3}; \pi]$.
Par conséquent, on a le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		-	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$