Produit scalaire dans l'espace et applications, cours, terminale spécialité Mathématiques

F.Gaudon

13 avril 2021

Table des matières

1 Produit scalaire dans l'espace

Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Soient A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$. Soit $\mathcal{P}$ un plan contenant les trois points. Alors le *produit scalaire* noté $\vec{u}.\vec{v}$ des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et le produit scalaire $\vec{AB}.\vec{AC}$ dans le plan $(\mathcal{P})$.

Propriétés :

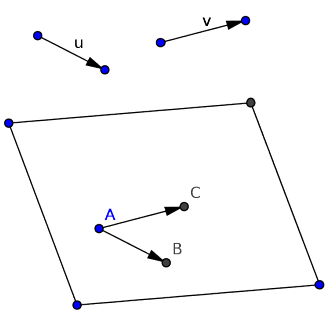
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et soient A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AC}$.

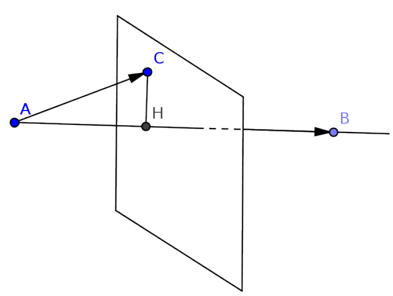
- Alors dans un plan $\mathcal{P}$ contenant les trois points :

$$\vec{u}.\vec{v} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

- Soit H le *projeté orthogonal* de C sur la droite (AB) dans le plan (ABC) c'est à dire le point d'intersection de la droite (AB) avec le plan orthogonal à (AB) passant par C, alors :

$$\vec{u}.\vec{v} = \vec{AB}.\vec{AH}$$

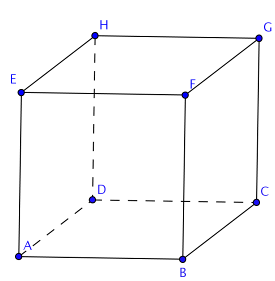




Exemple :

Dans le cube $ABCDEFGH$ de côté 1 ci-dessous, $\vec{AB}.\vec{CH} = \vec{AB}.\vec{BE}$ car $\vec{CH} = \vec{BE}$

D'où $\vec{AB}.\vec{CH} = AB \times BE \times \cos(\vec{AB}; \vec{BE}) = 1 \times \sqrt{2} \times \cos(\pi + \frac{\pi}{4}) = 1 \times (-\cos(\frac{\pi}{4})) = \sqrt{2} \times (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -1.$



Propriétés :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs et k un réel.
- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$;
- $(k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$;
- $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$.

Exemple :
Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-dessus :
$\vec{AC}.\vec{BF} = (\vec{AB} + \vec{BC}).\vec{BF} = \vec{AB}.\vec{BF} + \vec{BC}.\vec{BF} = AB \times BF \times \cos(\frac{\pi}{2}) + BC \times BF \times \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

Définition et propriété :

Le carré scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ est le réel noté $\vec{u}^2$ tel que $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u}$. On a

$$||\vec{u}||^2 = \vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2$$

et

$$AB^2 = \vec{AB}.\vec{AB} = \vec{AB}^2$$

Propriétés :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
- $||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + ||\vec{v}||^2$
- $||\vec{u} - \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + ||\vec{v}||^2$

Preuves :
- $||\vec{u} + \vec{v}||^2 = (\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}.\vec{u} + \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v} = ||\vec{u}||^2 + \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{v} + ||\vec{v}||^2$
- De même, $||\vec{u} - \vec{v}||^2 = (\vec{u} - \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}.\vec{u} - \vec{u}.\vec{v} - \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v} = ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + ||\vec{v}||^2$

Conséquences (formules de polarisation) :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2)$$

et

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2)$$

Preuves :
- $\frac{1}{2}(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2) = \frac{1}{2}(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - (||\vec{u}||^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + ||\vec{v}||^2) = \frac{1}{2}(2\vec{u}.\vec{v}) = \vec{u}.\vec{v}$
- $\frac{1}{2}(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2) = \frac{1}{2}(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 + 2\vec{u}.\vec{v} - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2) = \vec{u}.\vec{v}$

2 Orthogonalité dans l'espace

2.1 Vecteurs orthogonaux

Définitions :

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont dits *orthogonaux* si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.
- Deux droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dites orthogonales si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Définition :

- Dire qu'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est *orthonormée* signifie que ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux et de même norme égale à 1.
- Soit O un point de l'espace. $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère *orthonormé* de l'espace si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée de l'espace.

Propriété :

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors :

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Propriété :

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace.

- Soient $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points. La distance AB de A à B est donnée par :

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

- Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ a pour norme

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

2.2 Orthogonalité entre une droite et un plan

Propriété et définition :

> Une droite (d) est orthogonale à toutes les droites d'un plan $(\mathcal{P})$ si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes (d_1) et (d_2) de ce plan. On dit alors qu'elle est orthogonale au plan $(\mathcal{P})$.

Preuve :

- Il est évident que si la droite (d) est orthogonale à toutes les droites du plan $(\mathcal{P})$, alors elle est en particulier orthogonale aux droites (d_1) et (d_2) du plan.
- Montrons la réciproque.
  Soient $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ des vecteurs directeurs de (d_1) et (d_2) respectivement. Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de (d).
  Pour toute droite (d_3) du plan, soit $\vec{w}$ un vecteur directeur de (d_3).
  $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ sont des vecteurs directeurs du plan $(\mathcal{P})$ et $\vec{w}$ leur est coplanaire, donc il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u_1} + b\vec{u_2}$.
  (d) est orthogonale à (d_1) et à (d_2) donc $\vec{u}.\vec{u_1} = 0$ et $\vec{u}.\vec{u_2} = 0$
  D'où $\vec{u}.\vec{w} = \vec{u}.(a\vec{u_1} + b\vec{u_2}) = a\vec{u}.\vec{u_1} + b\vec{u}.\vec{u_2} = 0$.
  c'est à dire que (d) est orthogonale à (d_3).
  Ceci étant valable pour toute droite (d_3) du plan, la propriété est bien vraie.

2.3 Vecteur normal à un plan

Définition :

> Un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à un plan $(\mathcal{P})$ lorsque ce vecteur est un vecteur directeur d'une droite orthogonale au plan $(\mathcal{P})$.

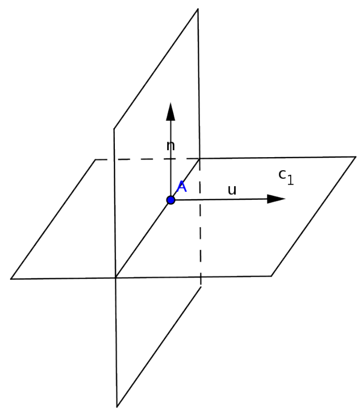
Exemple : démontrer qu'un vecteur est normal à un plan :

Soient $A(1;1;4)$, $B(-1;1;2)$ et $C(2;2;8)$ trois points et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$ un vecteur.

$\vec{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$. Ils ne sont de manière évidente pas colinéaires et définissent donc un plan (ABC).
Étudions si le vecteur $\vec{u}$ est normal au plan (ABC).
D'une part $\vec{u}.\vec{AB} = 1 \times (-2) + 3 \times 0 + (-1) \times (-2) = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{AB}$ sont orthogonaux.
D'autre part, $\vec{u}.\vec{AC} = 1 \times 1 + 3 \times 1 + (-1) \times 4 = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{AC}$ sont orthogonaux.
Par conséquent, $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan, il est donc orthogonal à tout vecteur du plan, c'est à dire qu'il est normal au plan.

Définition :

> Soient $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ des plans et $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ des vecteurs normaux à ces deux plans respectivement. $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont dits *perpendiculaires* si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont orthogonaux.



Exemple d'étude de position relative de plans :

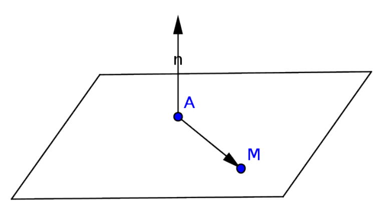
On considère les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ de vecteurs normaux respectifs $\vec{n_1}\begin{pmatrix}2\\-5\\9\end{pmatrix}$ et $\vec{n_2}\begin{pmatrix}4\\-9\\3\end{pmatrix}$.

$\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas colinéaires donc les plans ne sont pas parallèles et sont donc sécants selon une droite.
En outre $\vec{n_1}.\vec{n_2} = 2 \times 4 - 5 \times (-9) + 9 \times 3 = 80 \neq 0$ donc les plans ne sont pas perpendiculaires.

3 Application à la géométrie analytique

Propriété :

Soit $(\mathcal{P})$ un plan, A un point de $\mathcal{P}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal au plan $(\mathcal{P})$.Le plan est l'ensemble des points M tels que $\vec{AM}.\vec{n} = 0$.



Propriété et définition :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ un repère orthonormal.

- Soit $(\mathcal{P})$ un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$. Un point M de coordonnées $(x;y;z)$ appartient à $(\mathcal{P})$ si et seulement $ax+by+cz+d=0$ où d est un réel fixé. Cette équation est appelée *équation cartésienne* du plan $(\mathcal{D})$.
- Réciproquement, soient a, b, c et d des réels avec $(a;b;c)\neq(0;0;0)$. Alors l'ensemble des points M de coordonnées $(x;y;z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan de vecteur normal le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(a;b;c)$.

Preuve :

- Soit $A(x_A;y_A;z_A)$ un point du plan $(\mathcal{P})$.
  $M(x;y;z)\in(\mathcal{P})\Leftrightarrow \vec{AM}.\vec{n}=0\Leftrightarrow(x-x_A)a+(y-y_A)b+(z-z_A)c=0\Leftrightarrow ax+by+cz+(-ax_A+by_A+cz_A)=0$ ce qui montre que la relation $ax+by+cz+d=0$ caractérise le plan $(\mathcal{P})$.
- On peut supposer $a\neq0$, la démonstration serait identique dans les cas où $b\neq$ ou $c\neq$. Le point $A(\frac{-d}{a};0;0)$ est un point de l'ensemble $\mathcal{E}$ cherché. Soit $M(x;y;z)$ un autre point de $\mathcal{E}$. Alors $ax+by+cz+d=0$ et $-\frac{d}{a}a+0b+0c+d=0$ donnent $a(x+\frac{d}{a})+by+cz=0$ ce qui équivaut à $\vec{AM}.\vec{n}=0$ où $\vec{n}$ a pour coordonnées $(a;b;c)$. $\mathcal{E}$ est donc bien le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Exemple de recherche d'équation cartésienne d'un plan : :

On considère le plan $\mathcal{P}$ passant par le point $A(6;4;-5)$ et dont un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$.

Alors $M(x;y;z)\in\mathcal{P}\Leftrightarrow\vec{AM}.\vec{n}=0\Leftrightarrow-2(x-6)+4(y-4)+5(y-5)=0\Leftrightarrow-2x+4y+5y-29=0$.

Propriété et définition :

Soit $I(x_I;y_I;z_I)$ un point et R un réel positif.
Alors la sphère $(\mathcal{S})$ de centre I et de rayon R est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $(x-x_I)^2+(y-y_I)^2+(z-z_I)^2=R^2$.
Cette équation est une *équation cartésienne* de la sphère de centre I et de rayon R.

Preuve :

$M(x;y;z)\in(\mathcal{S})\Leftrightarrow IM^2=R^2\Leftrightarrow(x-x_I)^2+(y-y_I)^2+(z-z_I)^2=R^2$

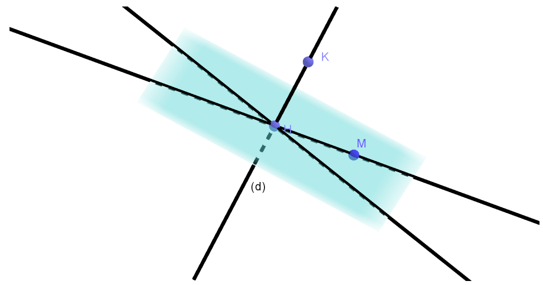
4 Projections orthogonales dans l'espace

Définition :

Le *projeté orthogonal d'un point M sur une droite (d)* est le point d'intersection de (d) avec le plan passant par M et orthogonal à (d).

Propriété et définition :

Le projeté orthogonal H d'une point M sur une droite (d) est le point de (d) le plus proche de M. On dit que MH est la *distance de M à la droite (d)*.



Preuve :

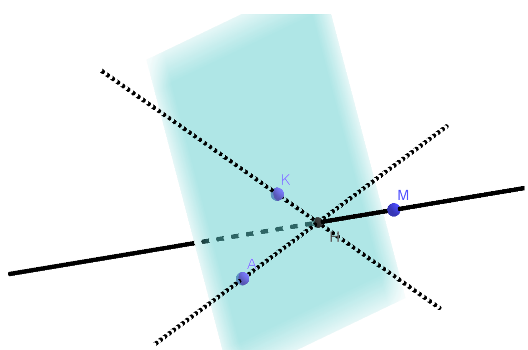
- Si M appartient à la droite (d) alors $M = H$ et $MH = 0$ ce qui est évidemment la plus courte distance possible.
- Si M n'appartient pas à (d), pour tout point K de la droite (d), le triangle MHK est un triangle rectangle en H. Par le théorème de Pythagore, on a donc $MK^2 = MH^2 + HK^2$ donc $MK^2 > MH^2$ et $MK > MH$ ce qui signifie que la distance MH est la distance la plus courte par rapport à n'importe quel point de la droite (d).

Définition :

Le *projeté orthogonal d'un point M sur un plan $\mathcal{P}$* est le point d'intersection H du plan $\mathcal{P}$ et de la droite orthogonale à $\mathcal{P}$ passant par M.

Propriété et définition :

Le projeté orthogonal H d'un point M sur le plan $\mathcal{P}$ est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M. On dit que MH est *la distance du point M au plan $\mathcal{P}$*.



Preuve :

- Si M appartient au plan $(\mathcal{P})$ alors $M = H$ et $MH = 0$ ce qui est évidemment la plus courte distance possible.

- Si M n'appartient pas à $(\mathcal{P})$, pour tout point K du plan $(\mathcal{P})$, le triangle MHK est un triangle rectangle en H. Par le théorème de Pythagore, on a donc $MK^2 = MH^2 + HK^2$ donc $MK^2 > MH^2$ et $MK > MH$ ce qui signifie que la distance MH est la distance la plus courte par rapport à n'importe quel point du plan $(\mathcal{P})$.

Propriété :

Soit A un point de l'espace et $\mathcal{P}$ un plan. Soit B un point du plan $\mathcal{P}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$. Soit H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$. Alors :

$$AH = \frac{|\vec{AB}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Preuve :
$\vec{AB}.\vec{n} = (\vec{AH} + \vec{HB}).\vec{n} = \vec{AH}.\vec{n} + \vec{HB}.\vec{n}$.
Or $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$ et H et B sont des points de $\mathcal{P}$ donc $\vec{HB}.\vec{n} = 0$.
D'où $\vec{AB}.\vec{n} = \vec{AH}.\vec{n}$ et $|\vec{AB}.\vec{n}| = |AH \times \|\vec{n}\| \cos(\vec{AH}; \vec{n})|$.
Mais $\vec{AB}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires donc $\cos(\vec{AH}; \vec{n})$ est égal à 1 ou -1.
D'où $|\vec{AB}.\vec{n}| = AH \times \|\vec{n}\|$. D'où la formule.