Produit scalaire dans l'espace et applications, cours, terminale spécialité mathématiques

1 Produit scalaire dans l'espace

Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Soient A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$. Soit $\mathcal{P}$ un plan contenant les trois points. Alors le *produit scalaire* noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le produit scalaire .... dans le plan $(\mathcal{P})$.

Propriétés :

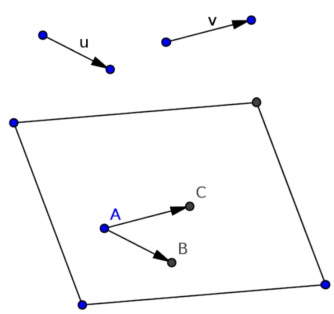
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et soient A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AC}$.

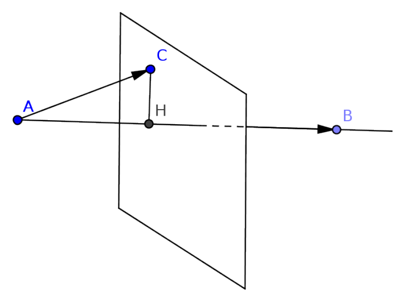
- Alors dans un plan $\mathcal{P}$ contenant les trois points :

....

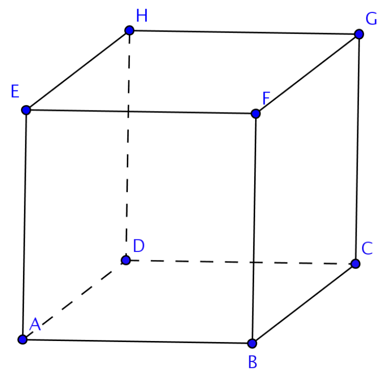
- Soit H le *projeté orthogonal* de C sur la droite (AB) c'est à dire le point d'intersection de la droite (AB) avec le plan orthogonal à (AB) passant par C, alors :

....





Exemple :
Dans le cube $ABCDEFGH$ de côté 1 ci-dessous,
$\vec{AB}.\vec{CH} =$......................
D'où $\vec{AB}.\vec{CH} =$ ....
...



Propriétés :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs et k un réel.

- $\vec{u}.\vec{v} = ...$;
- $(k\vec{u}).\vec{v} = ...$;
- $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = ...$;

Exemple :

Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-dessus :

$\vec{AC}.\vec{BF} = ...$

...

...

Définition et propriété :

Le carré scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ est le réel noté $\vec{u}^2$ tel que $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u}$. On a

$$\|\vec{u}\|^2 = ...$$

et

$$AB^2 = ...$$

Propriétés :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

- $||\vec{u}+\vec{v}||^2 =$...
- $||\vec{u}-\vec{v}||^2 =$...

Preuves :

- $||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ...$
  ...
- De même, $||\vec{u}-\vec{v}||^2 = ...$
  ...

Conséquences (formules de polarisation) :

....

et

....

Preuves :

- $\frac{1}{2}(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2) = ...$
  ...
- $\frac{1}{2}(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2) = ...$
  ...

2 Orthogonalité dans l'espace

2.1 Vecteurs orthogonaux

Définitions :

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont dits *orthogonaux* si ....
- Deux droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dites orthogonales si ....

Définition :

- Dire qu'une base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace est *orthonormée* signifie que ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux et de même norme égale à 1.
- Soit O un point de l'espace. $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère *orthonormé* de l'espace si $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base orthonormée de l'espace.

Propriété :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors :

....

Propriété :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace.

- Soient $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ deux points. La distance AB de A à B est donnée par :

  ...

- Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ a pour norme

  ....

2.2 Orthogonalité entre une droite et un plan

Propriété et définition :

Une droite (d) est orthogonale à toutes les droites d'un plan $(\mathcal{P})$ si et seulement si elle est orthogonale .... On dit alors qu'elle est orthogonale au plan $(\mathcal{P})$.

Preuve :

Il est évident que si la droite (d) est orthogonale à toutes les droites du plan $(\mathcal{P})$, alors elle est en particulier orthogonale aux droites (d_1) et (d_2) du plan.

Montrons la réciproque. Soient $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ des vecteurs directeurs de (d_1) et (d_2) respectivement. Soi $\vec{u}$ un vecteur directeur de (d). Alors pour toute droite (d_3) du plan, soit $\vec{w}$ un vecteur directeur de (d_3). $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ sont des vecteurs directeurs du plan $(\mathcal{P})$ et $\vec{w}$ leur est coplanaire donc il existe deux réels a et b tels que $\vec{w}$....................... Par ailleurs, $\vec{u}.\vec{u_1}$ =......... et $\vec{u}.\vec{u_2}$......... car .... Donc $\vec{u}.\vec{w}$.................. .... donc (d) est orthogonale à (d_3). Ceci étant valable pour toute droite (d_3) du plan, la propriété est bien vraie.

2.3 Vecteur normal à un plan

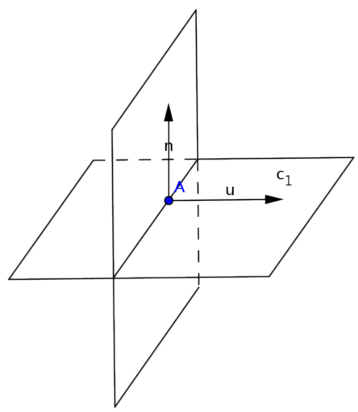
Définition :

Un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à un plan $(\mathcal{P})$ lorsque ce vecteur est un vecteur directeur d'une droite ....

Exemple : démontrer qu'un vecteur est normal à un plan :
Soient $A(1;1;4)$, $B(-1;1;2)$ et $C(2;2;8)$ trois points et $\vec{u}(1;3;-1)$ un vecteur.
$\vec{AB}$ a pour coordonnées .... et $\vec{AC}$ a pour coordonnées .... Ils ne sont de manière évidente pas .... et définissent donc un plan (ABC).
Étudions si le vecteur $\vec{u}$ est normal au plan (ABC).
D'une part $\vec{u}.\vec{AB}$ =................................. donc $\vec{u}$ et $\vec{AB}$ sont ....
D'autre part, $\vec{u}.\vec{AC}$ =................................ donc $\vec{u}$ et $\vec{AC}$ sont ....
Par conséquent, $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan, il est donc orthogonal à tout vecteur du plan, c'est à dire qu'il est .... au plan.

Définition :

Soient $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ des plans et $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ des vecteurs normaux à ces deux plans respectivement. $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont dits *perpendiculaires* si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont ....



Exemple d'étude de position relative de plans :
On considère les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ de vecteurs normaux respectifs $\vec{n_1}(2;-5;9)$ et $\vec{n_2}(4;-9;3)$.
$\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas .... donc les plans ne sont pas .... et sont donc sécants selon une droite.
En outre, $\vec{n_1}.\vec{n_2}$ =.......... donc les plans ne sont pas ....

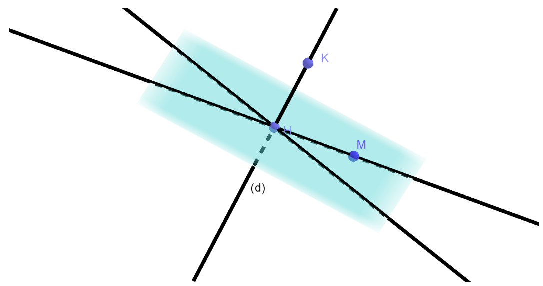
3 Projections orthogonales dans l'espace

Définition :

Le *projeté orthogonal d'un point M sur une droite (d)* est le point d'intersection de (d) avec ....

Propriété et définition :

Le projeté orthogonal H d'une point M sur une droite (d) est le point de (d) .... de M. On dit que MH est la *distance de M à la droite (d)*.



Preuve :

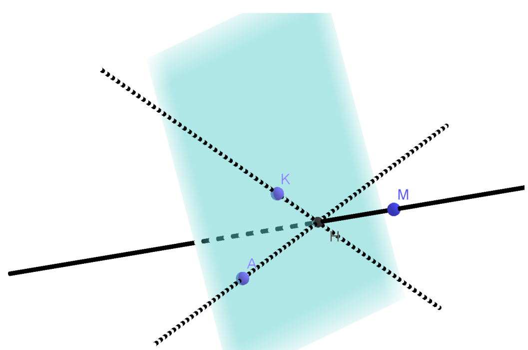
- Si M appartient à la droite (d) alors $M = H$ et $MH = 0$ ce qui est évidemment la plus courte distance possible.
- Si M n'appartient pas à (d), pour tout point K de la droite (d), le triangle MHK est un triangle rectangle en H. Par le théorème de Pythagore, on a donc $MK^2 = MH^2 + HK^2$ donc $MK^2 > MH^2$ et $MK > MH$ ce qui signifie que la distance MH est la distance la plus courte par rapport à n'importe quel point de la droite (d).

Définition :

> Le *projeté orthogonal d'un point M sur un plan $\mathcal{P}$* est le point d'intersection H du plan $\mathcal{P}$ et de .... passant par M.

Propriété et définition :

> Le projeté orthogonal H d'un point M sur le plan $\mathcal{P}$ est le point de $\mathcal{P}$ .... de M. On dit que MH est *la distance du point M au plan $\mathcal{P}$*.



Preuve :

- Si M appartient au plan $(\mathcal{P})$ alors $M = H$ et $MH = 0$ ce qui est évidemment la plus courte distance possible.
- Si M n'appartient pas à $(\mathcal{P})$, pour tout point K du plan $(\mathcal{P})$, le triangle MHK est un triangle rectangle en H. Par le théorème de Pythagore, on a donc $MK^2 = MH^2 + HK^2$ donc $MK^2 > MH^2$ et $MK > MH$ ce qui signifie que la distance MH est la distance la plus courte par rapport à n'importe quel point du plan $(\mathcal{P})$.