Compléments de géométrie dans l'espace, cours, terminale, spécialité Mathématiques

1 Représentations paramétriques de droite

Propriété et définition :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ un repère de l'espace. Soit d une droite de l'espace passant par un point A de coordonnées $(x_A;y_A;z_A)$ et admettant le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(a;b;c)$ pour vecteur directeur.
Un point M de coordonnées $(x;y;z)$ appartient à la droite d si et seulement si il existe un réel t tel que $\vec{AM} = t\vec{u}$ c'est à dire si et seulement si

$$\begin{cases} x &= x_A + ta \\ y &= y_A + tb \\ z &= z_A + tc \end{cases}$$

Ce système est appelé *représentation paramétrique* de la droite d et t est appelé *paramètre* de cette représentation.

Exemple [Savoir obtenir et utiliser une représentation paramétrique de droite] :
Soit A le point de coordonnées $(1;-4;3)$ et $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $(5;1;-2)$. Alors la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= 1 + 5t \\ y &= -4 + t \\ z &= 3 - 2t \end{cases}$$

c'est à dire qu'un point $M(x;y;z)$ appartient à cette droite si et seulement si ses coordonnées $(x;y;z)$ vérifient le système précédent.
On cherche si $B(14;-7;9)$ appartient à la droite :
B à la droite si et seulement il existe un réel t tel que

$$\begin{cases} 14 = 1 + 5t \\ -7 = -4 - t \\ 9 = 3 - 2t \end{cases}$$

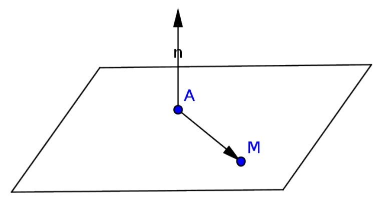
Le système n'a pas de solution donc B n'appartient pas à la droite.

Remarque :
Pour une droite donnée, il existe une infinité de représentations paramétriques de cette droite.

2 Équations cartésiennes de plan

Propriété :

Soit $(\mathcal{P})$ un plan, A un point de $\mathcal{P}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal au plan $(\mathcal{P})$.Le plan est l'ensemble des points M tels que $\vec{AM}.\vec{n} = 0$.



Propriété et définition :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ un repère orthonormal.

- Soit $(\mathcal{P})$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Un point M de coordonnées $(x;y;z)$ appartient à $(\mathcal{P})$ si et seulement $ax+by+cz+d=0$ où d est un réel fixé. Cette équation est appelée *équation cartésienne* du plan $(\mathcal{D})$.
- Réciproquement, soient a, b, c et d des réels avec $(a;b;c) \neq (0;0;0)$. Alors l'ensemble des points M de coordonnées $(x;y;z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan de vecteur normal le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Preuve :

- Soit $A(x_A;y_A;z_A)$ un point du plan $(\mathcal{P})$.
$M(x;y;z) \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \vec{AM}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x-x_A)a+(y-y_A)b+(z-z_A)c = 0 \Leftrightarrow ax+by+cz+(-ax_A+by_A+cz_A) = 0$ ce qui montre que la relation $ax+by+cz+d=0$ caractérise le plan $(\mathcal{P})$.
- On peut supposer $a \neq 0$, la démonstration serait identique dans les cas où $b \neq$ ou $c \neq$. Le point $A(\frac{-d}{a};0;0)$ est un point de l'ensemble $\mathcal{E}$ cherché. Soit $M(x;y;z)$ un autre point de $\mathcal{E}$. Alors $ax+by+cz+d=0$ et $-\frac{d}{a}a+0b+0c+d=0$ donnent $a(x+\frac{d}{a})+by+cz=0$ ce qui équivaut à $\vec{AM}.\vec{n}=0$ où $\vec{n}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. $\mathcal{E}$ est donc bien le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Exemple de recherche d'équation cartésienne d'un plan : :

On considère le plan $\mathcal{P}$ passant par le point $A(6;4;-5)$ et de vecteur normal $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Alors $M(x;y;z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \vec{AM}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow -2(x-6)+4(y-4)+5(y-5) = 0 \Leftrightarrow -2x+4y+5y-29 = 0$.

Propriété et définition :

> Soit $I(x_I;y_I;z_I)$ un point et R un réel positif.
> Alors la sphère $(\mathcal{S})$ de centre I et de rayon R est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $(x-x_I)^2+(y-y_I)^2+(z-z_I)^2 = R^2$.
> Cette équation est une *équation cartésienne* de la sphère de centre I et de rayon R.

Preuve :
$M(x;y;z) \in (\mathcal{S}) \Leftrightarrow IM^2 = R^2 \Leftrightarrow (x-x_I)^2+(y-y_I)^2+(z-z_I)^2 = R^2$

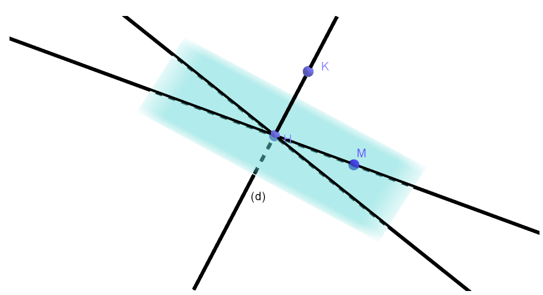
3 Projections orthogonales dans l'espace

Définition :

> Le *projeté orthogonal d'un point M sur une droite (d)* est le point d'intersection de (d) avec le plan passant par M et orthogonal à (d).

Propriété et définition :

> Le projeté orthogonal H d'une point M sur une droite (d) est le point de (d) le plus proche de M. On dit que MH est la *distance de M à la droite (d)*.



Preuve :

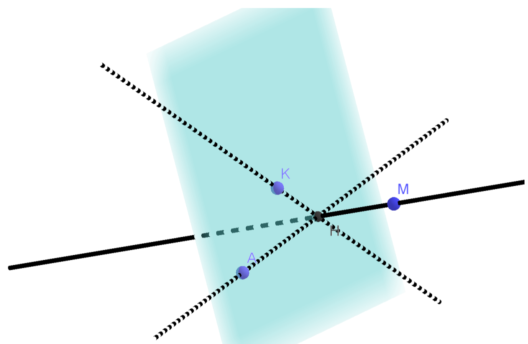
- Si M appartient à la droite (d) alors $M = H$ et $MH = 0$ ce qui est évidemment la plus courte distance possible.
- Si M n'appartient pas à (d), pour tout point K de la droite (d), le triangle MHK est un triangle rectangle en H. Par le théorème de Pythagore, on a donc $MK^2 = MH^2 + HK^2$ donc $MK^2 > MH^2$ et $MK > MH$ ce qui signifie que la distance MH est la distance la plus courte par rapport à n'importe quel point de la droite (d).

Définition :

Le *projeté orthogonal d'un point M sur un plan $\mathcal{P}$* est le point d'intersection H du plan $\mathcal{P}$ et de la droite orthogonale à $\mathcal{P}$ passant par M.

Propriété et définition :

Le projeté orthogonal H d'un point M sur le plan $\mathcal{P}$ est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M. On dit que MH est *la distance du point M au plan $\mathcal{P}$*.



Preuve :

- Si M appartient au plan $(\mathcal{P})$ alors $M = H$ et $MH = 0$ ce qui est évidemment la plus courte distance possible.
- Si M n'appartient pas à $(\mathcal{P})$, pour tout point K du plan $(\mathcal{P})$, le triangle MHK est un triangle rectangle en H. Par le théorème de Pythagore, on a donc $MK^2 = MH^2 + HK^2$ donc $MK^2 > MH^2$ et $MK > MH$ ce qui signifie que la distance MH est la distance la plus courte par rapport à n'importe quel point du plan $(\mathcal{P})$.

Propriété :

Soit A un point de l'espace et $\mathcal{P}$ un plan. Soit B un point du plan $\mathcal{P}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$. Soit H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$. Alors :

$$AH = \frac{|\vec{AB}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Preuve :

$\vec{AB}.\vec{n} = (\vec{AH} + \vec{HB}).\vec{n} = \vec{AH}.\vec{n} + \vec{HB}.\vec{n}$.
Or $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$ et H et B sont des points de $\mathcal{P}$ donc $\vec{HB}.\vec{n} = 0$.
D'où $\vec{AB}.\vec{n} = \vec{AH}.\vec{n}$ et $|\vec{AB}.\vec{n}| = |AH \times \|\vec{n}\| \cos(\vec{AH}; \vec{n})|$.
Mais $\vec{AB}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires donc $\cos(\vec{AH}; \vec{n})$ est égal à 1 ou -1.
D'où $|\vec{AB}.\vec{n}| = AH \times \|\vec{n}\|$. D'où la formule.