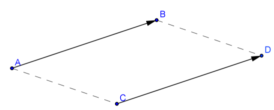
# Géométrie vectorielle dans l'espace, terminale spécialité Mathématiques

## 1 Vecteurs de l'espace

**Définition :**

Á tout couple de points $(A;B)$ de l'espace, on associe le vecteur $\vec{AB}$ tel que si $A$ et $B$ ne sont pas confondus, dans un plan qui contient $A$ et $B$, $\vec{AB}$ est le vecteur de la translation qui transforme $A$ en $B$. Si $A$ et $B$ sont confondus, le vecteur $\vec{AA}$ est le . . . . . . . . . . . . . noté . . . . . . . . ..




**Propriété :**

- Pour tout point $A$ de l'espace et pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point $B$ tel que . . . . . . . . . . .
- $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points de l'espace. $\vec{AB} = \vec{CD}$ si et seulement si . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ..
- Les règles de calculs sur les vecteurs du plan restent valables dans l'espace.

**Définition :**

Soit $n$ un entier naturel non nul et $k_1$, $k_2$, ..., $k_n$ des nombres réels. Soit $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$,...,$\vec{u_n}$ des vecteurs de l'espace.
Tout vecteur $\vec{v}$ de la forme ............................................................ est appelé *combinaison linéaire* des vecteurs $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, ..., $\vec{u_n}$.

**Exemple [Savoir exprimer un vecteur comme combinaison linéaire d'autres vecteurs] :**

On considère trois points de l'espace $A$, $B$ et $C$ et le point $M$ de l'espace tel que $\vec{BM} = 34\vec{BC}$. On souhaite exprimer le vecteur $\vec{AM}$ en fonction des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.
$\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM}$ d'après .............. ..................... .................. .
Donc $\vec{AM}$ =...................................... d'après la définition du vecteur $\vec{BM}$.
D'où $\vec{AM}$ =...............................................
............................
et $\vec{AM}$ = .............$\vec{AB}$ + ................$\vec{AC}$

# 2 Colinéarité et droites de l'espace

**Définition :**

> Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel $k$ tel que .................................. .

**Exemple :**

On considère un cube $ABCDEFG$ et les points I, J et K tels que I et le centre de la face BCGF, K est le milieu de [HG] et $\vec{BJ} = \frac{1}{4}\vec{BA}$. On va montrer que $(AK)$ et $(IJ)$ sont parallèles.

On a

$\vec{AK} = ...$

$=...$

$=...$

$=...$

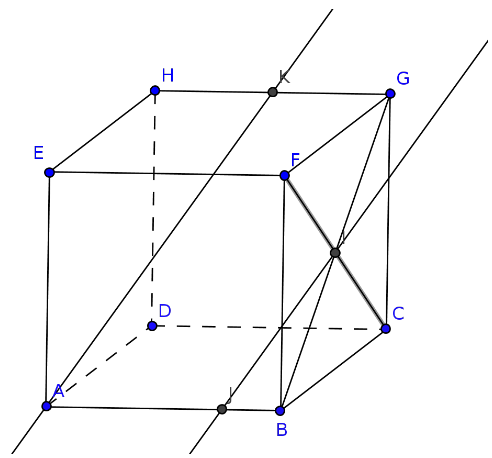
d'une part et

$\vec{JI} = ...$

$=....$

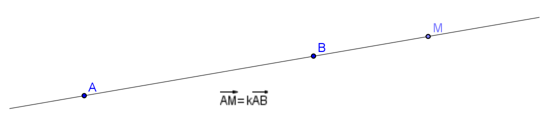
d'autre part.

Donc $\vec{AK} = ....\vec{JI}$ et les vecteurs $\vec{AK}$ et $\vec{JI}$ sont . . . . . . . . . . et les droites $(AK)$ et $(IJ)$ sont . . . . . . . . . ..




**Propriété :**

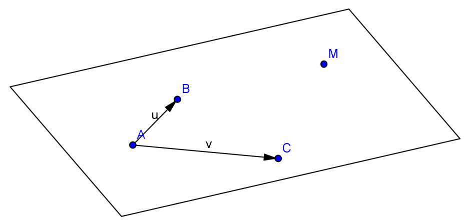
> Soient $A$ et $B$ deux points distincts de l'espace. La droite $(AB)$ est l'ensemble des points $M$ de l'espace tels qu'il existe un réel $k$ vérifiant . . . . . . . . . . . . . . ..



# 3 Coplanarité et plan de l'espace

**Définition :**

$A$, $B$ et $C$ sont trois points de l'espace non alignés. Le plan $(ABC)$ est l'ensemble des points $M$ tels qu'il existe $a$ et $b$ réels vérifiant . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . ..
On dit alors que $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ . . . . . . . . . . le plan ou qu'ils sont des . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . du plan $(ABC)$

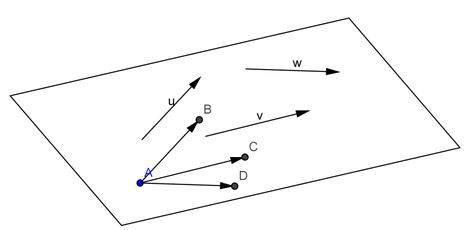



**Propriété et notation :**

Un plan $(\mathcal{P})$ est défini par un point $A$ et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non .......................... . On le note $P(A; \vec{u}; \vec{v})$.

**Définition :**

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont *coplanaires* si les points $A$, $B$, $C$ et $D$ de l'espace qui vérifient $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AC}$ et $\vec{w} = \vec{AD}$ ..........................
.................. ........................... .




**Propriété :**

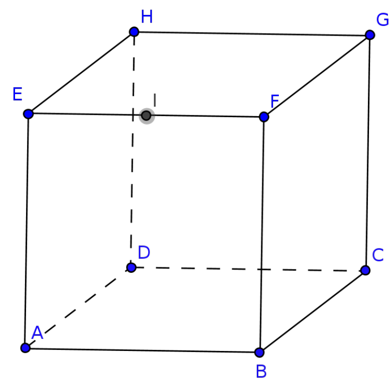
Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels $a$ et $b$ tels que . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ou si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont . . . .
. . . . . . . . . ..

**Remarque :**

Si deux plans sont dirigés par un même couple de vecteurs non colinéaires, alors . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ..

**Exemple :**

$ABCDEFGH$ est un cube. $I$ est le milieu de $[EF]$. On va montrer que $\vec{GC}$, $\vec{FE}$ et $\vec{AI}$ sont coplanaires :




On a

$$\begin{aligned}\vec{AI} &= ...\\ &= ...\\ &= ...\vec{GC} + ....\vec{FE}\end{aligned}$$

donc les vecteurs sont coplanaires.

# 4 Positions relatives de droites et de plans dans l'espace

## 4.1 Positions relatives entre deux droites

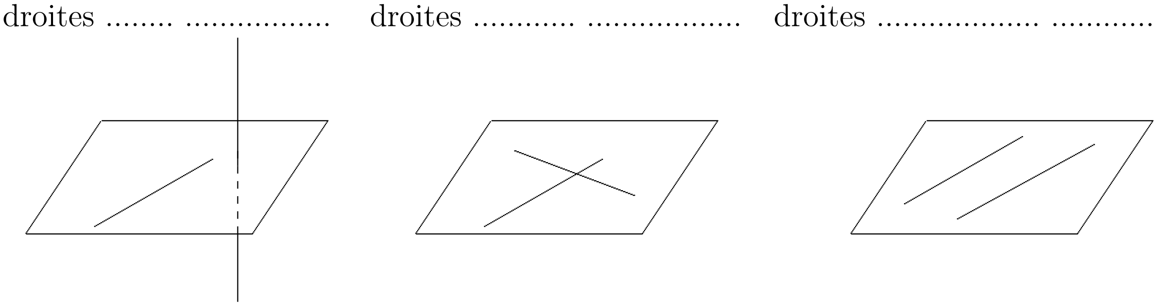
**Définition :**

> Deux droites sont dites *coplanaires* si elles sont .................... ..............
> .................. .

**Propriété :**

Soient $(\mathcal{D})$ et $\mathcal{D}'$ deux droites non confondues, c'est à dire distinctes. Les configurations suivantes sont les seules possibles :

droites ........ .................   droites ............ ..................   droites ................... ..................



**Remarque :**

Deux droites de l'espace non coplanaires n'ont donc aucun point commun et ne sont pourtant pas non plus parallèles, situation qui ne peut se produire dans un plan ou des droites qui n'ont aucun point commun sont parallèles.

## 4.2 Positions relatives entre une droite et un plan

**Définition :**

> Soit $d(A;\vec{u})$ une droite de l'espace et $\mathcal{P}(A;\vec{v};\vec{w})$ un plan de l'espace. La droite $(d)$ est dite *parallèle* au plan $\mathcal{P}$ si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont ....................................

**Propriété :**

> Une *droite* est *parallèle à un plan* si et seulement si elle n'a ............... ................. ......................... ................. .................. .

**Remarque :**

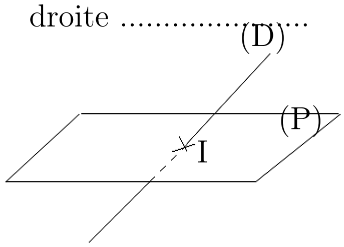
Attention : on a vu précédemment que deux droites qui n'ont aucun point commun ne sont pas nécessairement ................................ .

**Propriété :**

> Une droite $(\mathcal{D})$ de l'espace est parallèle à un plan si et seulement si le plan contient une droite qui ................. ......................... .

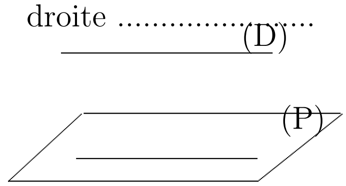
**Synthèse :**

droite ......................



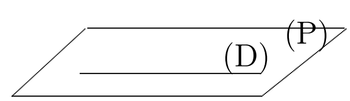

$(\mathcal{P}) \cap (\mathcal{D}) =$.............

droite ......................




$(\mathcal{P}) \cap (\mathcal{D}) =$.............

droite ..................




$(\mathcal{P}) \cap (\mathcal{D}) =$.............

### 4.3 Positions relatives entre deux plans

**Définition :**

- Deux plans sont dits parallèles si et seulement si deux vecteurs directeurs de l'un peuvent être .............................. ........................... .......................... de l'autre.
- Deux plans parallèles sont confondus s'ils ont ............. ............. .................. .

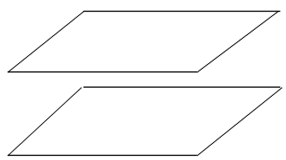
**Propriété :**

Deux plans non parallèles sont sécants selon .......... ................. .

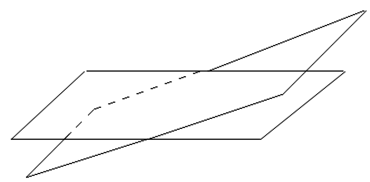
**Propriété :**

Soient $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ deux plans distincts. Les configurations suivantes sont les seules possibles :

plans .................... ...............



plans ...................



## 5 Géométrie analytique dans l'espace

### 5.1 Repérage dans l'espace

**Définition :**

- Une *base de l'espace* est un triplet $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ de vecteurs non ............................. .
- Un repère de l'espace est la donnée d'un point origine $O$ et d'une base de l'espace $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. On note alors $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ce repère.

**Propriété et définition :**

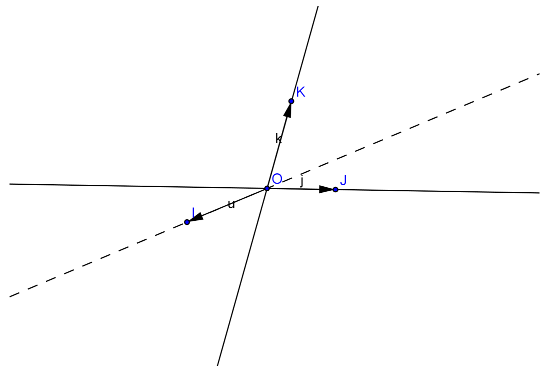
Soit $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ une base de l'espace. Pour tout $\vec{u}$, il existe un unique triplet $(x;y;z)$ appelé *coordonnées du vecteur* $\vec{u}$ de réels tels que

................

On note $\begin{pmatrix} \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \end{pmatrix}$.

**Propriété et définition :**

> Soit $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ un repère de l'espace. Pour tout point $M$, il existe un unique triplet $(x;y;z)$ appelé coordonnées du point $M$ de réels tels que $\vec{OM}=$. . . . . . . . . . . . . . . . . ...
> $x$ est . . . . . . . . . . . ., $y$ est . . . . . . . . . . . et $z$ est la . . . . . . . . . . . . du point $M$ dans ce repère.




**Propriété :**

> Soit $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ un repère de l'espace, $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ deux points. Alors :
>
> - Le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées :
>
>   .........
>
> - le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées :
>
>   ......

**Exemple [Déterminer les coordonnées d'un point à partir d'une égalité vectorielle] :**

On considère dans un repère de l'espace $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ les points $A(1;2;3)$, $B(4;-2;1)$ et $C(3;1;-2)$ ainsi que le point $M$ tel que $\vec{CM}=\frac{3}{4}\vec{AB}$. Déterminons les coordonnées de $M$.

D'une part, $\vec{AB}\begin{pmatrix}.........\\........\\........\end{pmatrix}$ donc $\vec{AB}\begin{pmatrix}.......\\.......\\.......\end{pmatrix}$ d'où $\frac{3}{4}\vec{AB}\begin{pmatrix}........\\........\\........\end{pmatrix}$

D'autre part, $\vec{CM}\begin{pmatrix}.........\\........\\........\end{pmatrix}$

De $\vec{CM}=\frac{3}{4}\vec{AB}$ on déduit donc

$\begin{cases}..........\\..........\\..........\end{cases}$ qui donne $\begin{cases}x=..........\\y=........\\z...........\end{cases}$

$M$ a donc pour coordonnées ............