

Compléments de géométrie dans l'espace, cours, terminale, spécialité Mathématiques

1 Représentations paramétriques de droite

Propriété et définition :

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ un repère de l'espace. Soit d une droite de l'espace passant par un point A de coordonnées $(x_A; y_A; z_A)$ et admettant le vecteur \vec{u} de coordonnées $(a; b; c)$ pour vecteur directeur.

Un point M de coordonnées $(x; y; z)$ appartient à la droite d si et seulement si il existe un réel t tel que $\vec{AM} = t\vec{u}$ c'est à dire si et seulement si

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$$

Ce système est appelé *représentation paramétrique* de la droite d et t est appelé *paramètre* de cette représentation.

Exemple [Savoir obtenir et utiliser une représentation paramétrique de droite] :

Soit A le point de coordonnées $(1; -4; 3)$ et \vec{u} le vecteur de coordonnées $(5; 1; -2)$. Alors la droite (d) passant par A et de vecteur directeur \vec{u} admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -4 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

c'est à dire qu'un point $M(x; y; z)$ appartient à cette droite si et seulement si ses coordonnées $(x; y; z)$ vérifient le système précédent.

On cherche si $B(14; -7; 9)$ appartient à la droite :

B à la droite si et seulement il existe un réel t tel que

$$\begin{cases} 14 = 1 + 5t \\ -7 = -4 + t \\ 9 = 3 - 2t \end{cases}$$

On trouve $t = 3$ donc B appartient à la droite.

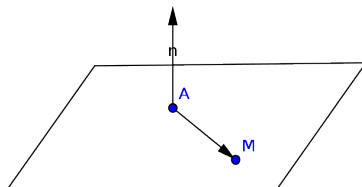
Remarque :

Pour une droite donnée, il existe une infinité de représentations paramétriques de cette droite.

2 Équations cartésiennes de plan

Propriété :

Soit (\mathcal{P}) un plan, A un point de \mathcal{P} et \vec{n} un vecteur normal au plan (\mathcal{P}) . Le plan est l'ensemble des points M tels que $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$.



Propriété et définition :

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ un repère orthonormal.

- Soit (\mathcal{P}) un plan de vecteur normal \vec{n} de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Un point M de coordonnées $(x; y; z)$ appartient à (\mathcal{P}) si et seulement $ax + by + cz + d = 0$ où d est un réel fixé. Cette équation est appelée *équation cartésienne* du plan (\mathcal{D}) .
- Réciproquement, soient a, b, c et d des réels avec $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$. Alors l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal le vecteur \vec{n} de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Preuve :

- Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point du plan (\mathcal{P}) .
 $M(x; y; z) \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x - x_A)a + (y - y_A)b + (z - z_A)c = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz + (-ax_A + by_A + cz_A) = 0$ ce qui montre que la relation $ax + by + cz + d = 0$ caractérise le plan (\mathcal{P}) .
- On peut supposer $a \neq 0$, la démonstration serait identique dans les cas où $b \neq 0$ ou $c \neq 0$. Le point $A(\frac{-d}{a}; 0; 0)$ est un point de l'ensemble \mathcal{E} cherché. Soit $M(x; y; z)$ un autre point de \mathcal{E} . Alors $ax + by + cz + d = 0$ et $-\frac{d}{a}a + 0b + 0c + d = 0$ donnent $a(x + \frac{d}{a}) + by + cz = 0$ ce qui équivaut à $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ où \vec{n} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. \mathcal{E} est donc bien le plan passant par A et de vecteur normal \vec{n} .

Exemple de recherche d'équation cartésienne d'un plan :

On considère le plan \mathcal{P} passant par le point $A(6; 4; -5)$ et de vecteur normal \vec{n} de coordonnées $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Alors

....

....

....

Propriété et définition :

Soit $I(x_I; y_I; z_I)$ un point et R un réel positif.
Alors la sphère (\mathcal{S}) de centre I et de rayon R est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que
Cette équation est une *équation cartésienne* de la sphère de centre I et de rayon R .

Preuve :

$$M(x; y; z) \in (\mathcal{S}) \Leftrightarrow IM^2 = R^2 \Leftrightarrow \dots$$