Dénombrement, cours, terminale, spécialité Mathématiques

1 Ensembles

Définitions :

- Un *ensemble* E est une collection d'éléments distincts que l'on peut énumérer lorsqu'ils sont en nombre fini. On note alors $E = \{a; b; c; d; e\}$.
- Un *sous-ensemble*, ou une *partie*, d'un ensemble E est un ensemble F tel que tous les éléments de F appartiennent à E. On dit alors que F est *inclus* dans E et on note alors $F \subset E$.
- *La réunion* $A \cup B$ de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A *ou (inclusif)* à B.
- *L'intersection* $A \cap B$ de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A *et* à B.
- Deux ensembles A et B dont l'intersection $A \cap B$ est vide sont dits *disjoints* ou *incompatibles*.

Exemples :

- $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ est un ensemble fini d'entiers ;
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ ont une infinité d'éléments ;
- $F = \{3; 5\}$ est inclus dans E ;
- Avec $A = \{a; b; c; d\}$ et $B = \{a; c; e; f\}$, $A \cup B = \{a; b; c; d; e; f\}$ et $A \cap B = \{a; c\}$.

Définition :

L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E, c'est à dire l'ensemble des sous ensembles de E.

Exemple :

Si $E = \{a; b; c\}$ alors $\mathcal{P}(E) = \{\{a\}; \{b\}; \{c\}; \{a; b\}; \{a; c\}; \{b; c\}; \{a; b; c\}; \emptyset\}$.

Définition :

Soit $\in \mathbb{N}^*$. On appelle p-uplet ou p-liste d'un ensemble E une collection *ordonnée* d'éléments de E. On note les p-uplet à l'aide de parenthèses.
En particulier, un 2-uplet s'appelle un *couple* et un 3-uplet s'appelle un *triplet*.

Exemple :

$(2; 3)$, $(3; 3)$ et $(3; 2)$ sont des 2-uplets donc des couples d'éléments de l'ensemble $E = \mathbb{N}$.

Définition : produit cartésien :

- Le produit cartésien $E \times F$ où E et F sont deux ensembles, est l'ensemble des couples $(x; y)$ où $x \in E$ et $y \in F$.
- Plus généralement, le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times ... \times E_p$ où E_1, E_2, ..., E_p sont p ensembles avec p entier non nul, est l'ensemble des p-uplets $(x_1; x_2; ...; x_p)$ avec $x_i \in E_i$ pour tout $i \in \{1; 2; ...; p\}$.

2 dénombrement

Définition :

Le *cardinal* d'un ensemble E est le nombre d'éléments de E. On le note $\text{card}(E)$.

Propriété : principe additif :

Si E_1, E_2,...E_n avec $n \in \mathbb{N}^*$ sont des ensembles finis deux à deux disjoints, alors $\text{card}(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup .. \cup E_n)=\text{card}(E_1)+\text{card}(E_2)+...+\text{card}(E_n)$.

Propriété : principe multiplicatif :

Le nombre d'éléments de l'ensemble $E_1 \times E_2 \times ... \times E_p$, où E_i est un ensemble à n_i éléments avec n_i entier naturel pour tout $i \in \{1; 2; ...; p\}$, est $n_1 \times n_2 \times ... \times n_p$.

Propriété :

Le nombre de p-uplets d'un ensemble à n éléments est n^p.

Définition :

On appelle *permutation* d'un ensemble à n éléments, tout n-uplet d'éléments distincts de cet ensemble.

Propriété :

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est égale à $n \times (n-1) \times .... \times 2 \times 1$. On note $n!$, lire « *factorielle* n », ce nombre. On a donc :

$$n! = n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1$$

Exemple :

Le nombre d'anagrammes (ayant un sens ou non) du mot « maths » est égal au nombre de 5-uplets de l'ensemble $E = \{m, a, t, h, s\}$ et est donc égal au nombre de permutations d'un ensemble de 5 éléments, c'est à dire $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Propriété :
Le nombre de p-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments est $\frac{n!}{(n-p)!}$

Exemple :
Dans une course comportant 10 participants le nombre de possibilités de classement des 3 premiers arrivés est le nombre de triplets distincts d'un ensemble à 10 éléments et est donc égal à $10 \times 9 \times 8 = 720$.

3 Combinaisons

Définition :
On appelle *combinaison* de p éléments parmi n éléments, avec p et n entiers naturels, et on note $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$, le nombre de parties à p éléments incluses dans un ensemble de n éléments.

Propriété :
Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n éléments est donné par

$$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Propriétés :
- $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1$
- $\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} = n$
- $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-p \end{pmatrix}$

Preuve :
Soit E un ensemble à n élément. Á toute partie de E on associe de manière unique sa partie complémentaire $\bar{A}$. A contient p éléments si et seulement si $\bar{A}$ contient $n-p$ éléments. Il y a donc autant de parties à p éléments dans E que de parties à $n-p$ éléments.

Propriété :

Pour tous les entiers n et p tels que $1 \leq p \leq n-1$,

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Preuve :

Soit E un ensemble à n éléments. Soit a un élément de E. Les parties de E à p éléments se répartissent en deux catégories :

- les parties F à p éléments qui ne contiennent pas l'élément a : il y en a donc autant que de parties à p éléments dans un ensemble à $n-1$ éléments, c'est à dire $\binom{n-1}{p}$
- les parties G à p éléments qui contiennent l'élément a : il en a autant que de parties à $p-1$ éléments dans un ensemble à $n-1$ éléments, c'est à dire $\binom{n-1}{p-1}$.

Comme il y a au total $\binom{n}{p}$ parties à p éléments dans E, on obtient le résultat.

Triangle de Pascal :

Le triangle de Pascal, du nom de Blaise Pascal, mathématicien français du XVII^{e} siècle qui le« redécouvra » en Occident (car il était connu avant en Orient et au Moyen-Orient) est une disposition permettant de visualiser et de calculer les coefficients binomiaux et qui s'appuie sur la formule précédente.

$\binom{0}{0}=1$					
$\binom{1}{0}=1$	$\binom{1}{1}=1$				
$\binom{2}{0}=1$	$\binom{2}{1}=2$	1			
$\binom{3}{0}=1$	$\binom{3}{1}=3$	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Explication de la construction : le nombre de la ligne n et de la colonne k est le coefficient binomial $\binom{n-1}{k-1}$. Il est obtenu en ajoutant le nombre situé au dessus (ligne $n-1$ et colonne k) au nombre de la colonne et de la ligne précédente (ligne $n-1$ et colonne $k-1$).
Par exemple, $\binom{3}{1}=3$ est la somme de $\binom{2}{1}=2$ et de $\binom{2}{0}=1$.

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Exemple de programmation du triangle de Pascal en langage python :

```
def trianglePascal(n):
        L=[1]
        L=L+[0 for k in range(n)]
        t=[L]
        for k in range(1,n+1):
                L=[1]
                for l in range(1,k+1):
                        L.append(t[k-1][l]+t[k-1][l-1])
                L=L+[0 for l in range(k,n)]
                t=t+[L]
        return t
```

Propriété :

Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n.

En outre :

$$\sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} = 2^n$$