Continuité, cours, terminale spécialité Mathématiques

F.Gaudon

6 janvier 2021

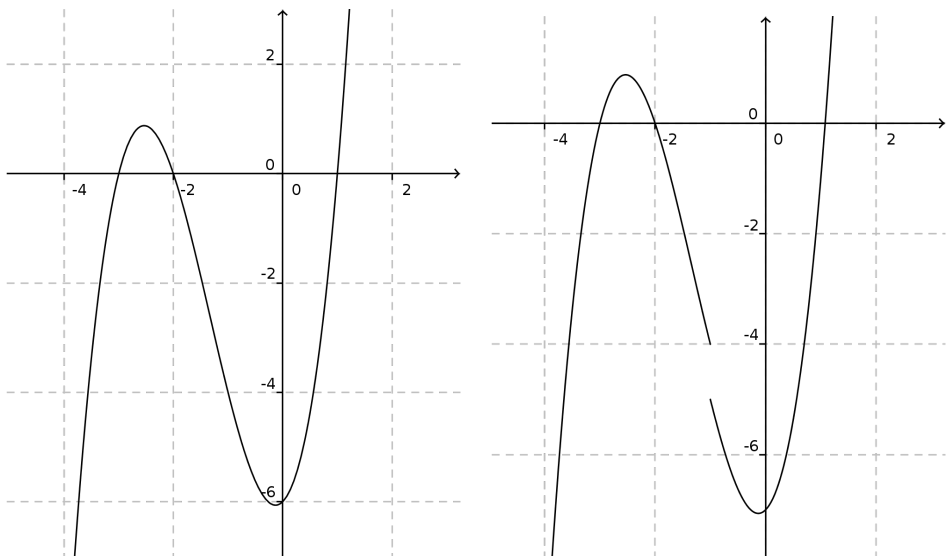
Table des matières

1 Continuité

Définition :

> Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un nombre réel de I.
> - La fonction f est dite *continue en a* si elle admet en a une limite égale à $f(a)$, c'est à dire si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
> - f est dite *continue sur I* si elle est continue en tout réel $a \in I$.

Exemple :
Ci-dessous la fonction f, définie par $f(x) = (x+2)(x-1)(x+3)$ sur $\mathbb{R}$, est continue sur $]-\infty; +\infty[$ alors que la fonction g définie sur $]-\infty; -1]$ par $g(x) = f(x)$ et sur $]-1; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - 1$ n'est pas continue en -1.



Propriété :

> Si f est une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en un réel $a \in I$, alors f est continue en a. En particulier, si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.

Remarque :
La réciproque n'est pas vraie comme le montre les contre exemples de la fonction racine carré et de la valeur absolue en 0.

Propriété (continuité des fonctions de référence) :

> - $x \mapsto \exp(x)$, les fonctions polynômes et la fonction valeur absolue sont continues sur $]-\infty; +\infty[$;
> - $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$ (alors qu'elle n'est dérivable que sur $]0; +\infty[$) ;
> - la fonction inverse est continue sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

Preuve :
Á l'exception du cas de la fonction racine carré et de la valeur absolue, la dérivabilité de chacune des fonctions suffit pour assurer la continuité.
Pour ce qui concerne la fonction racine carré, elle est dérivable donc continue sur $]0;+\infty[$. En outre $\sqrt{0}=0$ et pour tout x réel tel que $0<x<1$, on sait que $0\leq\sqrt{x}\leq x$. Donc de $\lim_{x\to 0} x=0$ on déduit $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}=0$ d'où la continuité en 0. Démonstration analogue pour la fonction valeur absolue.

2 Théorème des valeurs intermédiaires

2.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit $[a;b]$ un intervalle inclus dans I. Alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c de l'intervalle $[a;b]$ tel que $f(x)=k$, c'est à dire que f prend au moins une fois toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$.

Preuve :
Admis

Remarque :
$f(a)$ n'est pas nécessairement inférieur à $f(b)$.

Théorème - corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

Soit f une fonction continue *strictement monotone* sur un intervalle $[a;b]$.Alors, pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe *un unique* réel $c\in[a;b]$ tel que $f(c)=k$.

Preuve (cas où f est strictement croissante) :
Le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer qu'il existe au moins un réel c de $[a;b]$ tel que $f(c)=k$.
Si c' est un autre réel de $[a;b]$ tel que $c'<c$, f strictement croissante implique que $f(c')<f(c)$ donc $f(c')\neq k$.
De même, si c' est un autre réel de $[a;b]$ tel que $c'>c$, f strictement croissante implique $f(c')>f(c)$ donc $f(c')\neq k$.

Cas particulier de l'équation $f(x)=0$:

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a;b]$ telle que $f(a)\times f(b)<0$, alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $[a;b]$.

2.2 Généralisation à des intervalles quelconques

Propriété :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Le théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire admettent, entre autres, les généralisations suivantes :

- Si $I = [a; +\infty[$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors pour tout réel $k \geq f(a)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a; +\infty[$. Si, de plus, f est strictement croissante, alors il y a unicité de la solution.
- Si $I = [a; b[$ et $\lim_{x\to b} f(x) = l$ alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et l l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a; b[$. Si de plus f est strictement croissante, alors il y a unicité de la solution.
- Si $I = [-\infty; b[$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ et $\lim_{x\to b} f(x) = -\infty$ alors pour tout réel $k < l$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]-\infty; b[$. Si de plus, f est strictement décroissante, alors il y a unicité de la solution.

x	a		c		$+\infty$
					$+\infty$
				$\nearrow$	
f			k		
		$\nearrow$			
	$f(a)$				

x	a		c		b
				l	$\|\|$
				$\nearrow$	$\|\|$
f			k		$\|\|$
		$\nearrow$			$\|\|$
	$f(a)$				$\|\|$

x	$-\infty$		c		b
	l				$\|\|$
		$\searrow$			$\|\|$
f			k		$\|\|$
				$\searrow$	$\|\|$
				$-\infty$	$\|\|$

3 Application à l'étude de suites

3.1 Compléments sur les limites de suites : convergence des suites monotones

Théorème de la limite monotone :

Toute suite monotone et bornée est convergente.

Preuve :
Admise

conséquences :

- Soit (u_n) une suite croissante.
  - Si (u_n) n'est pas majorée alors elle est divergente vers $+\infty$.
  - Si (u_n) est majorée, alors elle est convergente.
- Soit (u_n) une suite décroissante.
  - Si (u_n) n'est pas minorée, alors elle est divergente vers $-\infty$.
  - Si (u_n) est minorée, alors elle est convergente.

Preuve (2 premières propriétés) :

- Soit (u_n) une suite croissante et non majorée. Soit a un réel. Il s'agit de montrer qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]a : +\infty[$.
  La suite n'est pas majorée par a donc il existe un rang N tel que u_N soit supérieure strictement à a, c'est à dire $u_N \in]a; +\infty[$. Puisque la suite est croissante, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq u_N > a$ donc $u_n \in]a; +\infty[$.
  Cela signifie que la suite admet pour limite $+\infty$.
- Comme (u_n) est croissante, elle est minorée par son premier terme. Comme est aussi majorée, elle est bornée. Par le théorème de la limite monotone, on en déduit qu'elle est convergente.

Exemple d'utilisation :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2$.
Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$
Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{1}{2}$ donc $0 \leq u_1 \leq u_0 \leq 1$.
Hérédité : On suppose que pour un rang $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{k+1} \leq u_k \leq 1$.
On a $u_{k+1} = f(u_k)$ avec f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.
f est croissante sur $[0; 1]$ donc $f(0) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(1)$
donc $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2} \leq 1$
D'où l'hérédité est vraie.
Conclusion : Par l'axiome de récurrence, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.
La suite (u_n) est donc décroissante car pour tout entier naturel n $u_{n+1} \leq u_n$.
(u_n) est aussi bornée car pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 1$.
Par conséquent, la suite (u_n) est décroissante et minorée donc elle est convergente d'après le théorème de la limite monotone.

3.2 Continuité et limites de suites

Propriété :

> Soit (u_n) une suite à valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ et convergente vers une limite l. Soit f une fonction définie sur I et continue en l. Alors, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(l)$. En particulier, si (u_n) est définie par son premier terme u_0 et par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n, alors l est solution de l'équation $l = f(l)$.

Exemple [Détermination de la limite d'une suite récurrente] :

On considère à nouveau la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2$.
On a démontré que cette suite est covnergente vers une limite que l'on notera l.
Comme la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ est continue sur $[0; 1]$, on a donc $(f(u_n))$ qui converge vers $f(l)$.
C'est à dire que, de $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2$, on peut déduire par passage à la limite et par unicité de la limite $l = \frac{1}{2}l^2$.
D'où $l - \frac{1}{2}l^2 = 0$ donc $l(1 - \frac{1}{2}l) = 0$ d'où $l = 0$ ou $l = 2$.
Comme 2 n'appartient pas à I, on a donc $l = 0$. (u_n) tend donc vers 0.