

# Continuité, terminale, spécialité Mathématiques

## 1 Continuité

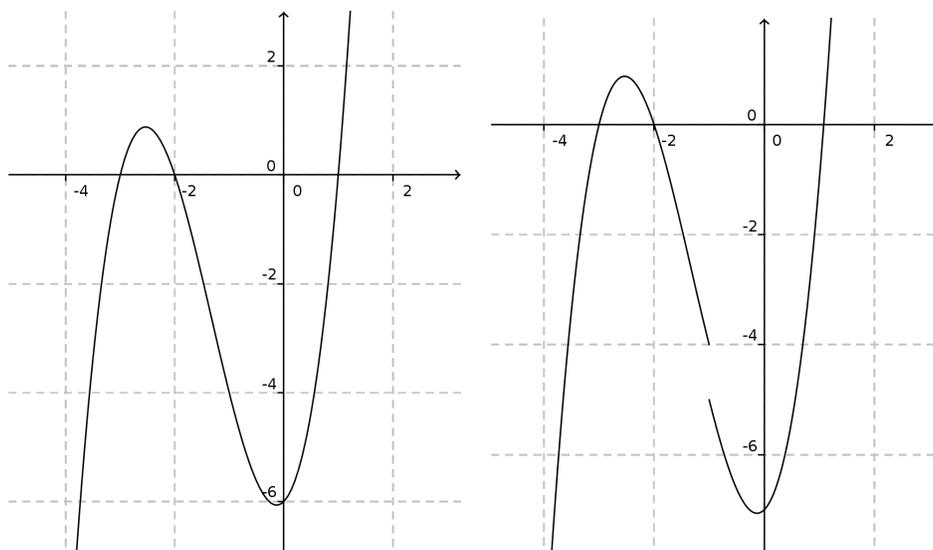
Définition :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $a$  un nombre réel de  $I$ .

- La fonction  $f$  est dite *continue en  $a$*  si . . . . .  
. . . . ., c'est à dire si . . . . .
- $f$  est dite *continue sur  $I$*  si elle est continue en tout réel  $a \in I$ .

Exemple :

Ci-dessous la fonction  $f$ , définie par  $f(x) = (x + 2)(x - 1)(x + 3)$  sur  $\mathbb{R}$ , est continue sur  $] - \infty; +\infty[$  alors que la fonction  $g$  définie sur  $] - \infty; -1]$  par  $g(x) = f(x)$  et sur  $] - 1; +\infty[$  par  $g(x) = f(x) - 1$  n'est pas continue en  $-1$ .



Propriété :

Si  $f$  est une fonction définie sur un intervalle  $I$  et . . . . . en un réel  $a \in I$ , alors  $f$  est continue en  $a$ . En particulier, si  $f$  est . . . . . sur  $I$ , alors  $f$  est continue sur  $I$ .

Remarque :

La réciproque n'est pas vraie comme le montrent les contre exemples de la fonction racine carré et de la valeur absolue en 0.

Propriété (continuité des fonctions de référence) :

- $x \mapsto \exp(x)$ , les fonctions polynômes et la fonction valeur absolue sont continues sur  $] - \infty; +\infty[$ ;
- $x \mapsto \sqrt{x}$  est continue sur  $[0; +\infty[$  (alors qu'elle n'est dérivable que sur  $]0; +\infty[$ );
- la fonction inverse est continue sur  $] - \infty; 0[$  et sur  $]0; +\infty[$ .

**Preuve :**

À l'exception du cas de la fonction racine carré et de la valeur absolue, la dérivabilité de chacune des fonctions suffit pour assurer la continuité.

Pour ce qui concerne la fonction racine carré, elle est dérivable donc continue sur  $]0; +\infty[$ . En outre  $\sqrt{0} = \dots$  et pour tout  $x$  réel tel que  $0 < x < 1$ , on sait que  $\dots \leq \sqrt{x} \leq \dots$ . Donc de  $\lim_{x \rightarrow 0} x = \dots$ , on déduit  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = \dots$  d'où la continuité en 0. Démonstration analogue pour la fonction valeur absolue.

## 2 Théorème des valeurs intermédiaires

### 2.1 Théorème des valeurs intermédiaires

**Théorème des valeurs intermédiaires :**

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et soit  $[a; b]$  un intervalle inclus dans  $I$ . Alors, pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ ,  $\dots$

**Preuve :**

Admis

**Remarque :**

$f(a)$  n'est pas nécessairement inférieur à  $f(b)$ .

**Corollaire :**

Soit  $f$  une fonction continue et  $\dots$  sur un intervalle  $[a; b]$ . Alors, pour tout  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ ,  $\dots$

**Preuve (cas où  $f$  est  $\dots$ ) :**

Le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer qu'il  $\dots$

Si  $c'$  est un autre réel de  $[a; b]$  tel que  $c' < c$ ,  $f$  strictement croissante implique que  $f(c') \dots f(c)$  donc  $\dots$

De même, si  $c'$  est un autre réel de  $[a; b]$  tel que  $c' > c$ ,  $f \dots$  implique  $f(c') \dots f(c)$  donc  $f(c') \dots k$ .

**Cas particulier de l'équation  $f(x) = 0$  :**

Si  $f$  est une fonction continue et strictement monotone sur  $[a; b]$  telle que  $\dots$   $\dots$ , alors l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution sur  $[a; b]$ .



## 2.2 Généralisation à des intervalles quelconques

Propriété :

Le théorème des valeurs intermédiaires et son corollaires admettent les généralisations suivantes :

- Si  $I = [a; +\infty[$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  alors pour tout réel  $k \geq f(a)$ , l'équation  $f(x) = k$  admet une solution dans l'intervalle  $[a; +\infty[$ .
- Si  $I = [a; b[$  et  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = l$  alors pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $l$  l'équation  $f(x) = k$  admet une solution dans  $[a; b[$ .
- Si  $I = ]-\infty; b]$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$  et  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = -\infty$  alors pour tout réel  $k < l$ , l'équation  $f(x) = k$  admet une solution dans l'intervalle  $] - \infty; b]$ .

$x$	$a$	$c$	$+\infty$
			...
$f$		...	...
	...		
	.....		

$x$	$a$	$c$	$b$
			...
$f$		...	
	...		

$x$	$-\infty$	$c$	$b$
	...		
$f$	...	...	
		...	

## 3 Application à l'étude de suites

### 3.1 Compléments sur les limites de suites : convergence des suites monotones

Théorème de la limite monotone :

Toute suite ..... et ..... est convergente.

Preuve :

Admise

conséquences :

- Soit  $(u_n)$  une suite croissante.
  - Si  $(u_n)$  n'est pas majorée alors elle est .....
  - Si  $(u_n)$  est majorée, alors elle est .....
- Soit  $(u_n)$  une suite décroissante.
  - Si  $(u_n)$  n'est pas minorée, alors elle est .....
  - Si  $(u_n)$  est minorée, alors elle est .....



**Preuve (2 premières propriétés) :**

- Soit  $(u_n)$  une suite croissante et non majorée. Soit  $a$  un réel. Il s'agit de montrer qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle  $]a; +\infty[$ .  
La suite n'est pas majorée par  $a$  donc il existe un rang  $N$  tel que  $u_N$  soit supérieure strictement à  $a$ , c'est à dire  $u_N \in ]a; +\infty[$ . Puisque la suite est croissante, pour tout  $n \geq N$ ,  $u_n \geq u_N > a$  donc  $u_n \in ]a; +\infty[$ .  
Cela signifie que la suite admet pour limite  $+\infty$ .
- Comme  $(u_n)$  est croissante, elle est minorée par son premier terme. Comme est aussi majorée, elle est bornée. Par le théorème de la limite monotone, on en déduit qu'elle est convergente.

**Exemple d'utilisation :**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2$ .

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$

Initialisation : Pour  $n = 0$ ,  $u_0 = \dots$  et  $u_1 = \dots$  donc .....

Hérédité : On suppose que pour un rang  $k \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_{k+1} \leq u_k \leq 1$ .

Il faut montrer que .....

On a  $u_{k+1} = f(u_k)$  avec  $f$  définie sur  $[0; 1]$  par  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ .

$f$  est croissante sur  $[0; 1]$  donc ..... donc .....

D'où l'hérédité est vraie.

Conclusion : Par l'axiome de récurrence, pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$ .

La suite  $(u_n)$  est donc ..... car pour tout entier naturel  $n$   $u_{n+1} \leq u_n$ .

$(u_n)$  est aussi ..... car pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq u_n \leq 1$ .

Par conséquent, la suite  $(u_n)$  est ..... et ..... donc elle est convergente d'après le théorème de la limite monotone.

**3.2 Continuité et limites de suites****Propriété :**

Soit  $(u_n)$  une suite à valeurs dans un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et convergente vers une limite  $l$ . Soit  $f$  une fonction définie sur  $I$  et ..... en  $l$ . Alors, la suite  $(f(u_n))$  converge vers ..... En particulier, si  $(u_n)$  est définie par son premier terme  $u_0$  et par  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout entier naturel  $n$ , alors  $l$  est solution de l'équation .....

**Exemple [Détermination de la limite d'une suite récurrente] :**

On considère à nouveau la suite définie par  $u_0 = 1$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2$ .

On a démontré que cette suite est convergente vers une limite que l'on notera  $l$ .

Comme la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$  est continue sur  $[0; 1]$ , on a donc  $(f(u_n))$  qui converge vers  $f(l)$ .

C'est à dire que, de  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2$ , on peut déduire par passage à la limite et par unicité de la limite

.....

D'où .....

donc .....

D'où ..... ou .....

Comme ..... n'appartient pas à  $I$ , on a donc  $l = \dots\dots\dots$  .  $(u_n)$  tend donc vers 0.