Compléments sur la dérivation
terminale, spécialité Mathématiques

1 Fonction dérivée, tangente

Définitions :

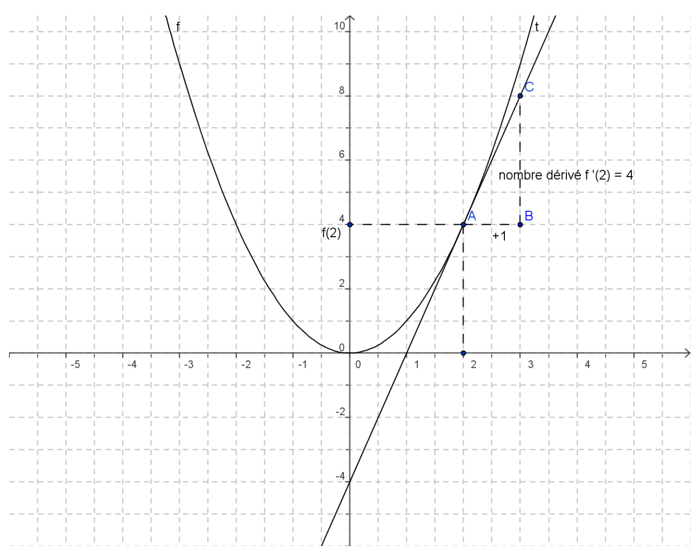
> Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a. Dire que f est dérivable en a de nombre dérivé $f'(a)$, signifie que le taux d'accroissement $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers $f'(a)$ quand h tend vers 0. Lorsque f est dérivable en tout réel a de I, f est dite dérivable sur I et $f' : x \mapsto f'(x)$ pour tout $x \in I$ est appelée fonction dérivée de f sur I.

Remarque :
On définit de même la dérivée seconde f'' comme dérivée de f', puis la dérivée troisième $f^{(3)}$ et ainsi de suite.

Propriété :

> Dire que f est dérivable en a, signifie que la courbe représentative de f dans un repère admet au point A de coordonnées $(a; f(a))$ une tangente $\mathcal{T}$ de coefficient directeur $f'(a)$.
> L'équation de la tangente $\mathcal{T}$ est alors
>
> $$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Preuve :
$f'(a)$ étant le coefficient directeur, l'équation réduite de la tangente est de la forme
$y = f'(a)x + p$ où p est un réel.
Comme $A(a; f(a))$ appartient à la tangente, on a donc $f(a) = f'(a)a + p$
d'où on déduit que $p = f(a) - f'(a)a$.
D'où l'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.



Exemple [Savoir déterminer l'équation réduite d'une tangente] :
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$.
$f(3) = 9$ et $f'(3) = 6$.
L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3 est donc
$y = f'(3)(x-3) + f(3)$
c'est à dire $y = 6(x-3) + 9$
donc $y = 6x - 9$.

2 Dérivation de fonctions

2.1 Fonctions dérivées usuelles (rappel)

$f(x)$	expression de $f'(x)$	ensemble de dérivabilité $\mathcal{D}_{f'}$
k	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$mx+p$	m	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\frac{1}{x^n}$	$-n\frac{1}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

2.2 Opérations sur la dérivation

Propriété :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel. Alors $u+v$, ku, uv sont dérivables sur I, $\frac{u}{v}$ est dérivable pour tout $a \in I$ tel que $v(a) \neq 0$ et :

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(k\,u)' = k\,u'$$

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$(\frac{1}{v})' = -\frac{v'}{v^2}$$

Exemple [Savoir déterminer l'ensemble de dérivabilité d'une fonction et calculer sa fonction dérivée] :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{4x-3}{x+1}$.
$x+1=0$ si et seulement si $x=-1$ donc l'ensemble de définition est $\mathbb{R}-\{-1\}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas et on a :
$f'(x) = \dfrac{u'v-v'u}{v^2}(x)$ avec $u(x) = 4x-3$, $u'(x) = 4$, $v(x) = x+1$, $v'(x) = 1$.
Donc $f'(x) = \dfrac{4(x+1)-1(4x-3)}{(x+1)^2} = \dfrac{4x+4-4x+3}{(x+1)^2} = \dfrac{7}{(x+1)^2}$

3 Dérivation de fonctions composées

Définition :

Soit u une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans un ensemble F et v définie sur l'ensemble F. La fonction *composée* de u suivie de v est la fonction notée $v \circ u$ définie pour tout réel x de I par $(v \circ u)(x) = v(u(x))$.

$$x \overset{u}{\mapsto} u(x) = X \overset{v}{\mapsto} v(X) = v(u(x))$$

Exemple [Savoir calculer la composée de deux fonctions] :
Soient v et u les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = 3x + 5$ et $u(x) = x^2$.
Alors $v \circ u(x) = v(u(x)) = v(x^2) = 3x^2 + 5$
et $u \circ v(x) = u(v(x)) = u(3x + 5) = 3x^2 + 5$.

Propriété :

Si u est une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en $x \in I$ et si v est une fonction dérivable en $u(x)$, alors la fonction g définie par $g = v \circ u$ est dérivable en x et :

$$g'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$$

Cas particuliers :

- Soient a et b deux réels et J l'ensemble des réels x tels que $ax+b \in I$. Alors la fonction $g : x \longmapsto v(ax+b)$ est dérivable sur J et pour tout x réel de J,
$$g'(x) = av'(ax + b)$$
- Soit n un entier naturel non nul. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et ne s'annulant pas sur I dans le cas $n < 0$. Alors u^n est dérivable sur I et :
$$(u^n)' = nu'u^{n-1}$$
- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors e^u est dérivable sur I et :
$$(e^u)' = u'e^u$$
- On considère une fonction u strictement positive et dérivable sur un intervalle I. La fonction $g : x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et :
$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Preuve de la dérivée de u^n dans le cas $n \geq 1$:
Par récurrence.
Initialisation : Pour $n = 1$, $(u^1)' = u'$ et $nu'u^{n-1} = u'$ donc la propriété est vraie au rang 1.
Hérédité : Supposons la propriété vraie pour un rang $n \geq 1$, c'est à dire que pour un rang n, $(u^n)' = nu'u^{n-1}$. Alors $u^{n+1} = u \times u^n$ donc en utilisant la dérivation de produits $(u^{n+1})' = (u^n)'u + u'u^n$. En outre, par hypothèse de récurrence, on a $(u^n) = nu'u^{n-1}$. D'où $(u^{n+1})' = nu'u^{n-1}u + u'u^n = nu'u^n + u'u^n = (n+1)u'u^n$. La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
Conclusion : par l'axiome de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout $n \geq 1$.

Exemple [Calculer la dérivée d'une fonction composée :

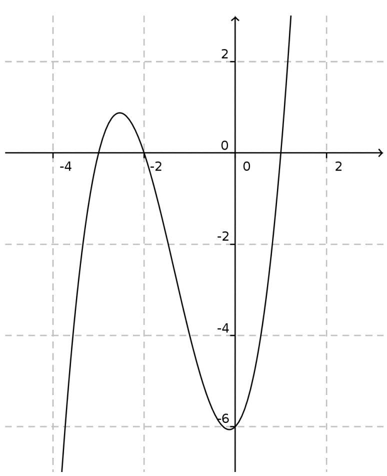
- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (4x-5)^2$.
  g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est de la forme $g(x) = v(ax+b)$ avec $v(X) = X^n$.
  Donc $g'(x) = av'(ax+b)$ avec $v'(X) = nX^{n-1}$ c'est à dire :
  $g'(x) = n \times a \times (ax+b)^{n-1} = 2 \times 4 \times (4x-5) = 8(4x-5) = 3x - 40$.
- Soit h la fonction définie sur $I =]\frac{-1}{3}; +\infty[$ par $h(x) = 5\sqrt{3x+1}$.
  h est dérivable sur I et est de la forme $h(x) = 5\sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = 3x+1$
  Donc $h'(x) = 5\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ avec $u'(x) = 3$.
  D'où $h'(x) = 5 \times \dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}} = \dfrac{15}{2\sqrt{3x+1}}$.
- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (5x^4+7)^3$.
  g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est de la forme $g(x) = u(x)^n$ avec $u(x) = 5x^4 + 7$.
  Donc $g'(x) = nu'(x)u(x)^{n-1}$ avec $u'(x) = 4 \times 5x^3 = 20x^3$.
  D'où $g'(x) = 3 \times (5 \times 4x^3 + 0)(5x^4+7)^2 = 60x^3(5x^4+7)^2$

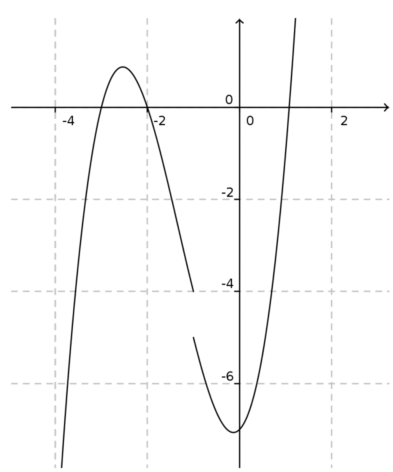
4 Notion intuitive de continuité

Définition intuitive :

Une fonction f définie sur un intervalle I est continue sur I si sa courbe représentative ne présente aucune rupture.

Exemple :
Ci-dessous la fonction f, définie par $f(x) = (x+2)(x-1)(x+3)$ sur $\mathbb{R}$, est continue sur $]-\infty; +\infty[$ alors que la fonction g définie sur $]-\infty; -1]$ par $g(x) = f(x)$ et sur $]-1; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - 1$ n'est pas continue en -1.





Propriétés (admises) :

- Les fonctions affines, la fonction carré et les fonctions polynômes, la fonction inverse, la fonction racine carrée et la fonction valeur absolue sont continues sur leur ensemble de définition.
- Si une fonction est dérivable sur un intervalle I, alors elle est continue sur cet intervalle.

Remarque :
La réciproque n'est pas vraie : la fonction valeur absolue est continue sur $]-\infty;+\infty[$ mais n'est pas dérivable en 0.

Convention :

Une flèche dans le tableau de variations d'une fonction f indique :
- la stricte croissance ou stricte décroissance de f sur l'intervalle correspondant ;
- la continuité de la fonction f sur cet intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires (admis) :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe *au moins* un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Conséquence : corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

Si de plus f est *strictement monotone* sur I, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un *unique* réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

x	a		c		b
					$f(b)$
				$\nearrow$	
f			k		
		$\nearrow$			
	$f(a)$				

x	a		c		b
	$f(a)$				
		$\searrow$			
f			k		
				$\searrow$	
					$f(b)$

Exemple [Savoir utiliser le théorème des valeurs intermédiaires] :
Montrons que l'équation $x^3 = 0,5$ admet une unique solution sur $[0;1]$. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3$ sur $[0;1]$.
- f est dérivable donc continue sur $[0;1]$;
- $f'(x) = 3x^2$ donc $f'(x) > 0$ pour tout réel x de $[0;1]$ donc f est strictement croissante sur $[0;1]$;
- $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0,5$ admet une unique solution sur $[0;1]$.

5 Convexité

Définition :

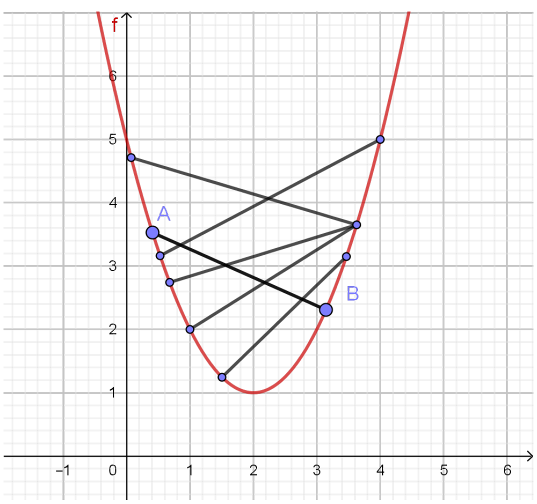
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et dont la fonction dérivée f' est aussi dérivable sur I. On appelle *dérivée seconde* de f et on note f'' la fonction dérivée de f' sur I c'est à dire la fonction définie par $f'' = (f')'$.

Exemple [Calcul de la dérivée seconde d'une fonction] :
Soit f définie par $f(x) = 5x^3 + 3x^2 - 2x + 9$.
f est dérivable sur $]-\infty; +\infty[$ et $f'(x) = 15x^2 + 6x - 2$.
f' est dérivable sur $]-\infty; +\infty[$ et $f''(x) = 30x + 6$.

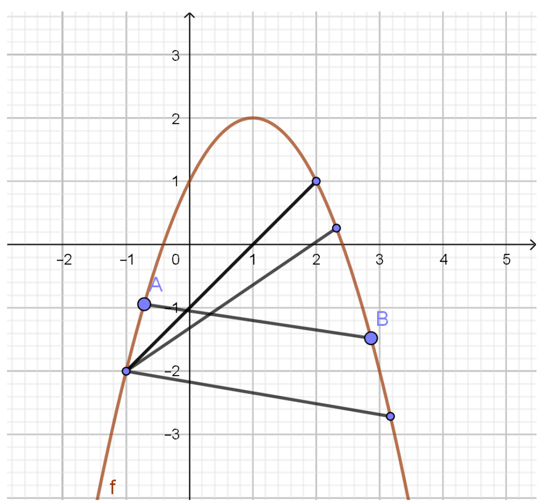
Définition :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et soit $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère.

- f est dite *convexe* sur I si sa courbe représentative est en-dessous de toutes ses sécantes sur I.
- f est dite *concave* sur I si sa courbe est au-dessus de toutes ses sécantes sur I



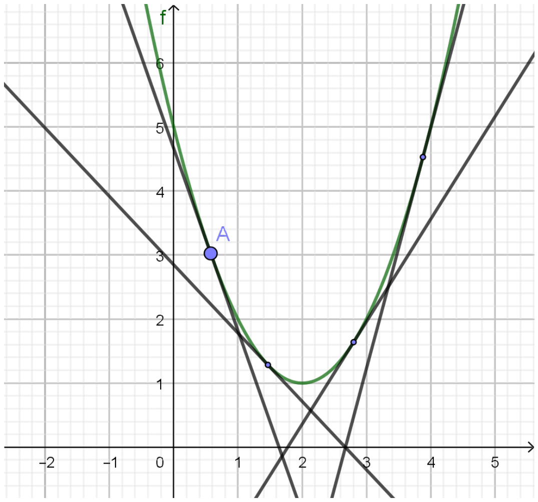
Sécantes et convexité



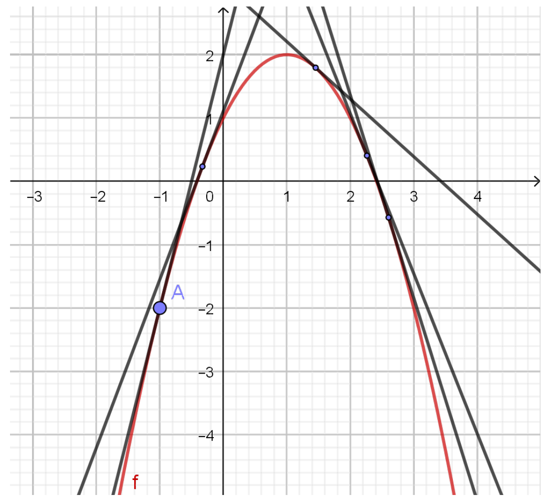
Sécantes et concavité

Propriété :

- f est convexe sur I
  si et seulement si sa courbe représentative dans un repère et entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes
  si et seulement si sa fonction dérivée f' est croissante sur I.
- f est concave sur I
  si et seulement si sa courbe représentative dans un repère du plan est entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes
  si et seulement si sa fonction dérivée f' est décroissante sur I.



Tangentes et convexité



Tangentes et concavité

Preuves :
Admises

Propriété :

f est convexe sur I si et seulement $-f$ est concave sur I.

Propriété :

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur I.
- f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I ;
- f est concave sur I si et seulement si f'' est négative sur I.

Preuve :
Soit $x_0 \in I$. On considère la tangente à la courbe représentative de f en x_0. Elle a pour équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Il s'agit de montrer que la courbe est au dessus de cette tangente pour tout réel $x \in I$.
On considère donc la fonction différence d définie sur I par $d(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
d est deux fois dérivable sur I et : $d'(x) = f'(x) - f'(x_0)$
$d''(x) = f''(x)$
Comme f'' est positive, f' est croissante sur I.
On a donc, compte tenu du fait que $d(x_0) = f(x_0) - f'(x_0)(x_0 - x_0) - f(x0) = 0$:

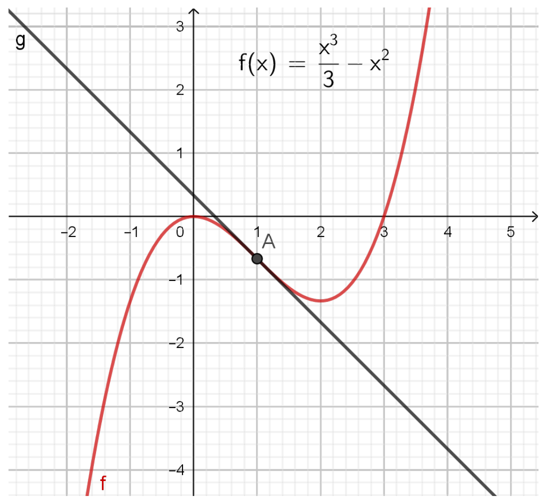
x	a	x_0	b
signe $d''(x)$	$+$		$+$
variations $d'(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$
signe $d'(x)$	-	0	$+$
variations d	$\searrow$	0	$\nearrow$

D'où pour tout $x \in I$, $d(x) \geq 0$ ce qui signifie que la courbe représentative de f est toujours au dessus de sa tangente en x_0.
On démontre de même le deuxième point.

Définition :

> Un *point d'inflexion* est un point où la représentation graphique d'une fonction traverse sa tangente.

Exemple :
Le point de coordonnées $(0;0)$ est un point d'inflexion pour la représentation graphique de la fonction cube.



Propriété :

> Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et x_0 un réel de I. Si f'' s'annule en changeant de signe pour $x = x_0$, alors la représentation graphique de f admet un point d'inflexion de coordonnées $(x_0; f(x_0))$.

Preuve :
On considère à nouveau la fonction d définie sur I par $d(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
d est deux fois dérivable sur I et : $d'(x) = f'(x) - f'(x_0)$
$d''(x) = f''(x)$
f'' change de signe en x_0.
On peut supposer que f est négative avant x_0 et positive après, la démonstration étant identique dans l'autre cas.

x	a	x_0	b
signe $d''(x)$	-	0	$+$
variations $d'(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$
signe $d'(x)$	$+$	0	$+$
variations d	$\nearrow$	0	$\nearrow$
signe $d(x)$	-	0	$+$

Ce qui montre la courbe est en dessous de sa tangente avant x_0 et au dessus après.

Exemple :
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2$.
On a $f'(x) = x^2 - 2x$ et $f''(x) = 2x - 2$.
$f''(x) \geq 0$ si et seulement si $x \geq 1$. La courbe représentative de f dans un repère du plan admet donc un point d'inflexion au point d'abscisse 1.