Compléments sur la dérivation, cours, terminale spécialité mathématiques

1 Fonction dérivée, tangente

Définitions :

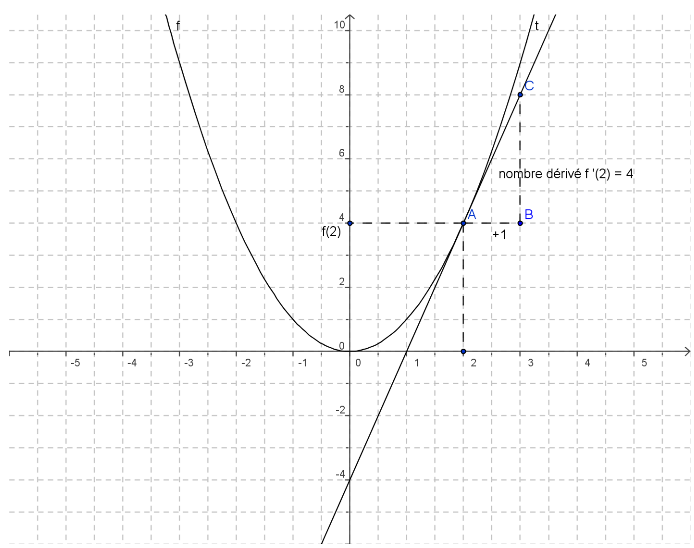
Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a. Dire que f est dérivable en a de nombre dérivé $f'(a)$, signifie que le taux d'accroissement .... tend vers $f'(a)$ quand h tend vers 0. Lorsque f est dérivable en tout réel a de I, f est dite dérivable sur I et $f' : x \mapsto f'(x)$ pour tout $x \in I$ est appelée fonction dérivée de f sur I.

Propriété :

Dire que f est dérivable en a, signifie que la courbe représentative de f dans un repère admet au point A de coordonnées $(a; f(a))$ une tangente $\mathcal{T}$ de coefficient directeur $f'(a)$.
L'équation de la tangente $\mathcal{T}$ est alors :

...

Preuve :
$f'(a)$ étant le coefficient directeur, l'équation réduite de la tangente est de la forme .... où p est un réel.
Comme $A(a; f(a))$ appartient à la tangente, on a donc ....
D'où on déduit que $p =$........................ .
D'où l'équation ....



Exemple [Savoir déterminer l'équation réduite d'une tangente] :
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) =$............ .
$f(3) =$............. et $f'(3) =$.......... .
L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3 est donc
....
c'est à dire ....
donc ....

2 Dérivation de fonctions

2.1 Dérivées de fonctions usuelles

$f(x)$	expression de $f'(x)$	ensemble de dérivabilité $\mathcal{D}_{f'}$
k	....	$\mathbb{R}$
x	....	$\mathbb{R}$
$mx+p$	....	$\mathbb{R}$
x^2	.....	$\mathbb{R}$
x^n	......	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	....	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	....	$]0;+\infty[$
$\frac{1}{x^n}$	$-n\dfrac{1}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

2.2 Opérations sur la dérivation

Propriété :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel. Alors $u+v$, ku, uv sont dérivables sur I, $\frac{u}{v}$ est dérivable pour tout $a \in I$ tel que $v(a) \neq 0$ et :

$$(u+v)' = ...$$

$$(ku)' = ...$$

$$(uv)' = ...$$

$$(\frac{u}{v})' = ...$$

$$(\frac{1}{v})' = ...$$

Exemple [Savoir déterminer l'ensemble de dérivabilité d'une fonction et calculer sa fonction dérivée] :
Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{4x-3}{x+1}$.
$x+1=0$ si et seulement si .... donc l'ensemble de définition est ....
f est dérivable sur .... comme quotient de deux fonctions dérivables sur .... dont le dénominateur ne s'annule pas et on a :
$f'(x) = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}(x)$ avec $u(x) = 4x-3$, $u'(x) =$..........., $v(x) = x+1$, $v'(x) =$..............
Donc $f'(x) =$................... ....

3 Dérivation de fonctions composées

Définition :

Soit u une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans un ensemble F et v définie sur l'ensemble F. La fonction *composée* de u suivie de v est la fonction notée $v \circ u$ définie pour tout réel x de I par $(v \circ u)(x) =$.................... .

$x \mapsto$ .... $= X \mapsto$ .... $=$ .....

Exemple [Savoir calculer la composée de deux fonctions] :
Soient v et u les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = 3x+2$ et $u(x) = x^2$.
Alors $v \circ u(x) = \ldots$
et $u \circ v(x) = \ldots.$

Propriété :

Si u est une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en $x \in I$ et si v est une fonction dérivable en $u(x)$, alors la fonction définie par $g = v \circ u$ est dérivable en x et :

...

Cas particuliers :

Soient a et b deux réels et J l'ensemble des réels x tels que $ax+b \in I$. Alors la fonction $g : x \longmapsto v(ax+b)$ est dérivable sur J et pour tout x réel de J,

....

Autres cas particuliers :

- Soit n un entier relatif. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et ne s'annulant pas sur I dans le cas $n < 0$. Alors u^n est dérivable sur I et :

  ....

- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors e^u est dérivable sur I et :

  ....

- On considère une fonction u strictement positive et dérivable sur un intervalle I. La fonction $g : x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et :

  ....

Exemple [Savoir calculer la fonction dérivée d'une fonction composée] :

- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (4x-5)^2$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

  ....

  ....
- Soit h la fonction définie sur $I =]\frac{-1}{3}; +\infty[$ par $h(x) = 5\sqrt{3x+1}$. h est dérivable sur I et :

  ....

  ....

- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (5x^4+7)^3$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

  ....

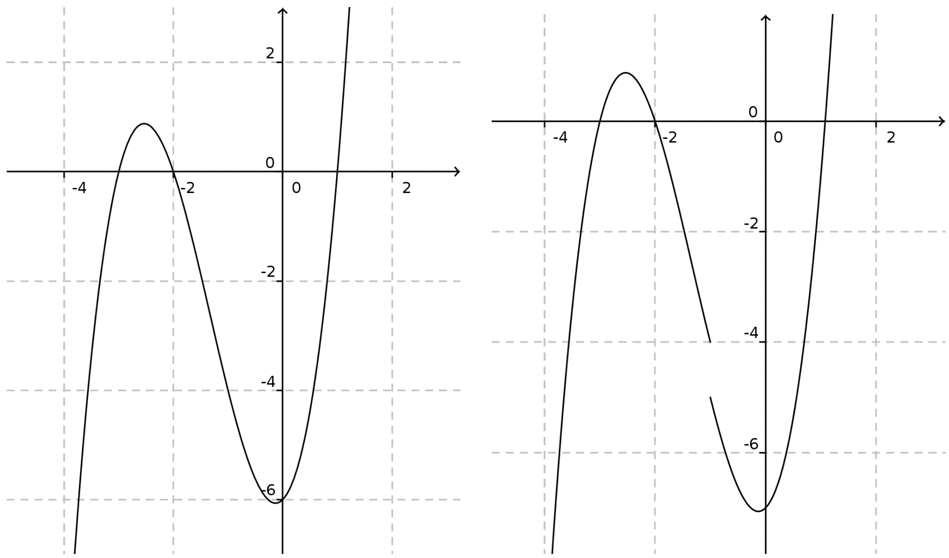
  ....

4 Notion intuitive de continuité

Définition intuitive :

> Une fonction f définie sur un intervalle I est continue sur I si ....
> ....

Exemple :
Ci-dessous la fonction f, définie par $f(x) = (x+2)(x-1)(x+3)$ sur $\mathbb{R}$, est continue sur $]-\infty;+\infty[$ alors que la fonction g définie sur $]-\infty;-1]$ par $g(x) = f(x)$ et sur $]-1;+\infty[$ par $g(x) = f(x) - 1$ n'est pas continue en ..... .



Propriétés (admises) :

> - Les fonctions affines, la fonction carré et les fonctions polynômes, la fonction inverse, la fonction racine carrée et la fonction valeur absolue sont continues sur leur ensemble de définition.
> - Si une fonction est .... sur un intervalle I, alors elle est continue sur cet intervalle.

Remarque :
La réciproque n'est pas vraie : la fonction valeur absolue est continue sur $]-\infty;+\infty[$ mais n'est pas dérivable en 0.

Convention :

> Une flèche dans le tableau de variations d'une fonction f indique :
> - la stricte croissance ou stricte décroissance de f sur l'intervalle correspondant ;
> - la continuité de la fonction f sur cet intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires (admis) :

> Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, ...
> ....

Conséquence, corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

> Si de plus f est *strictement monotone* sur I, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, ...
> ....

x	a		c		b
					$f(b)$
				$\nearrow$	
f			k		
		$\nearrow$			
	$f(a)$				

x	a		c		b
	$f(a)$				
		$\searrow$			
f			k		
				$\searrow$	
					$f(b)$

Exemple [Savoir utiliser le théorème des valeurs intermédiaires] :
Montrons que l'équation $x^3 = 0,5$ admet une unique solution sur $[0;1]$. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3$ sur $[0;1]$.

- f est .... donc continue sur $[0;1]$;
- $f'(x) =$.............. donc $f'(x)$ est de signe .... pour tout réel x de $[0;1]$ donc f est .... sur $[0;1]$;
- $f(0) =$...... et $f(1) =$......... .

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0,5$ admet une unique solution sur $[0;1]$.

5 Convexité

Définition :

> Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et dont la fonction dérivée f' est aussi dérivable sur I. On appelle *dérivée seconde* de f et on note f'' la fonction dérivée de f' sur I c'est à dire la fonction définie par $f'' = (f')'$.

Exemple [Calcul de la dérivée seconde d'une fonction] :

Soit f définie par $f(x) = 5x^3 + 3x^2 - 2x + 9$.

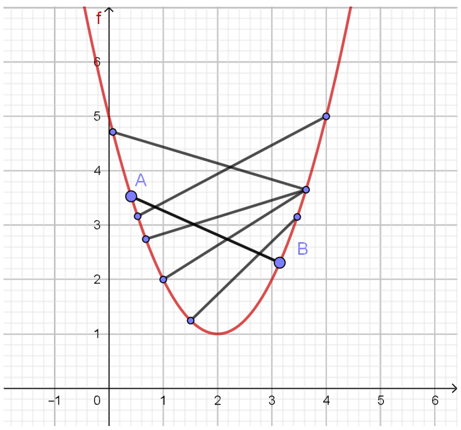
f est dérivable sur $]-\infty;+\infty[$ et $f'(x) =$.....................

f' est dérivable sur $]-\infty;+\infty[$ et $f''(x) =$....................

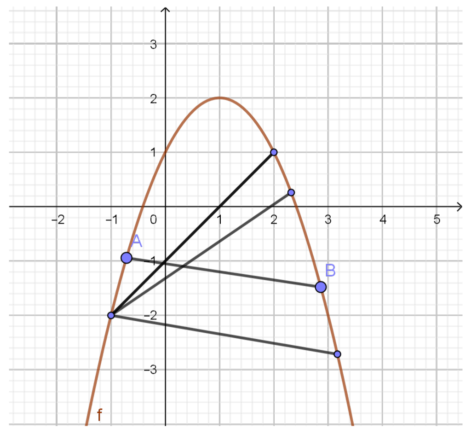
Définition :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et soit $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère.

- f est dite *convexe* sur I si sa courbe représentative est .... de toutes ses .... sur I.
- f est dite *concave* sur I si sa courbe est .... de toutes ses .... sur I



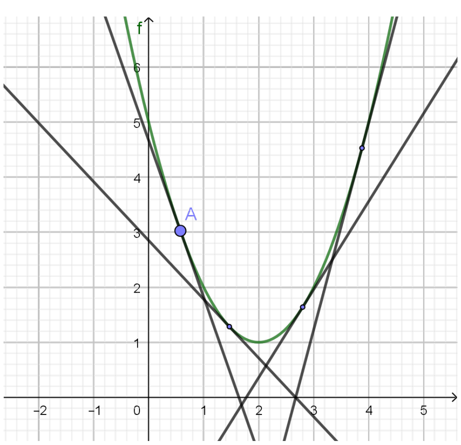
....



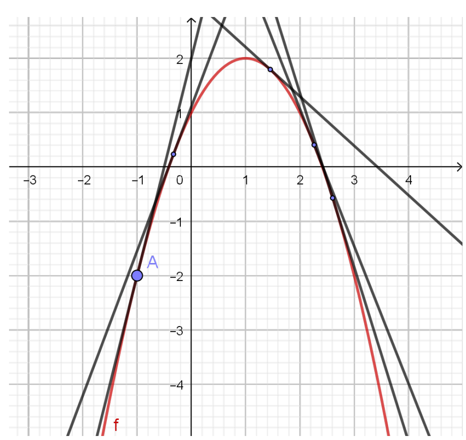
....

Propriété :

- f est convexe sur I
  si et seulement si sa courbe représentative dans un repère et entièrement située .... de chacune de ses ....
  si et seulement si sa fonction dérivée f' est .... sur I.
- f est concave sur I
  si et seulement si sa courbe représentative dans un repère du plan est entièrement située .... de chacune de ses ....
  si et seulement si sa fonction dérivée f' est .... sur I.



....



....

Preuves :
Admises

Propriété :

f est convexe sur I si et seulement $-f$ est .... sur I.

Propriété :

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur I.
- f est convexe sur I si et seulement si f'' est .... sur I ;
- f est concave sur I si et seulement si f'' est .... sur I.

Preuve :
Soit $x_0 \in I$. On considère la tangente à la courbe représentative de f en x_0. Elle a pour équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Il s'agit de montrer que la courbe est au dessus de cette tangente pour tout réel $x \in I$.
On considère donc la fonction différence d définie sur I par $d(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
d est deux fois dérivable sur I et : $d'(x) = f'(x) - f'(x_0)$
$d''(x) = f''(x)$
Comme f'' est positive, f' est croissante sur I.
On a donc, compte tenu du fait que $d(x_0) = f(x_0) - f'(x_0)(x_0 - x_0) - f(x0) = 0$:

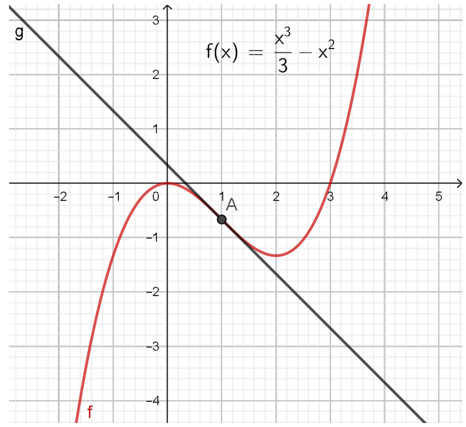
x	a	x_0	b
signe $d''(x)$	+		+
variations $d'(x)$	↗	0	↗
signe $d'(x)$	-	0	+
variations d	↘	0	↗

D'où pour tout $x \in I$, $d(x) \geq 0$ ce qui signifie que la courbe représentative de f est toujours au dessus de sa tangente en x_0.
On démontre de même le deuxième point.

Définition :

Un *point d'inflexion* est un point où la représentation graphique d'une fonction ....

Exemple :
Le point de coordonnées .... est un point d'inflexion pour la représentation graphique de la fonction cube.



Propriété :

> Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et x_0 un réel de I. Si f'' ...., alors la représentation graphique de f admet un point d'inflexion de coordonnées $(x_0; f(x_0))$.

Preuve :

On considère à nouveau la fonction d définie sur I par $d(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
d est deux fois dérivable sur I et : $d'(x) = f'(x) - f'(x_0)$
$d''(x) = f''(x)$
f'' change de signe en x_0.
On peut supposer que f est négative avant x_0 et positive après, la démonstration étant identique dans l'autre cas.

x	a	x_0	b
signe $d''(x)$	-	0	$+$
variations $d'(x)$	↘	0	↗
signe $d'(x)$	$+$	0	$+$
variations d	↗	0	↗
signe $d(x)$	-	0	$+$

Ce qui montre la courbe est en dessous de sa tangente avant x_0 et au dessus après.

Exemple :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2$.
On a $f'(x) =$............
et $f''(x) =$.............
$f''(x) \geq 0$ si et seulement si $x \geq$ .... La courbe représentative de f dans un repère du plan admet donc un point d'inflexion au point d'abscisse .....