Matrices, cours, terminale, mathématiques expertes

1 Définitions

Dans ce qui suit, m et p sont des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.

Définition :

Une *matrice* A de dimensions $m \times p$ est un tableau de nombres réels m lignes et p colonnes. Ces nombres sont appelés *coefficients* de la matrice A. Pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq p$, on note a_{ij} ou $a_{i,j}$ le coefficient situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j. On note aussi $A = (a_{ij})$ la matrice A.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Définitions :

- Une matrice de dimensions $1 \times p$ est appelée *vecteur-ligne* ou *matrice-ligne* ;
- Une matrice de dimensions $m \times 1$ est appelée *vecteur-colonne* ou *matrice-colonne* ;
- Si $m = p$, la matrice est dite *carrée* d'ordre p.
- On appelle *matrice transposée* d'une matrice $A = (a_{ij})$ matrice notée A^t définie par $A^t = (a_{ji})$. Les colonnes de la matrice A sont donc les lignes de la matrice A^t.
- Deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont égales si pour tout i tel que $1 \leq i \leq m$ et tout j tel que $1 \leq j \leq p$, on a $a_{ij} = b_{ij}$.

Exemples :

$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur ligne.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$ est un vecteur colonne.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$ est la matrice transposée de la matrice A.

2 Opérations sur les matrices

2.1 Somme

Définition : somme de matrices :

Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de même dimension. On appelle matrice *somme* et on note $A + B$, la matrice dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est égale à $a_{ij} + b_{ij}$ pour tout $i \in \{1; 2; ...; m\}$ et tout $j \in \{1; 2; ...; p\}$.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 11 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 19 \\ 5 & -1 & 26 \end{pmatrix}$$

Propriétés :

Soit A, B et C trois matrices de même dimensions. Alors :

- $A + B = B + A$: on dit que la somme de matrices est *commutative* ;
- $A + (B + C) = (A + B) + C$: on dit que la somme de matrices est *associative*.

2.2 Produit par un réel

Définition : produit par un réel :

On appelle matrice produit de la matrice A par un réel k, la matrice notée kA dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j pour tout $i \in \{1; 2; ...; m\}$ et tout $j \in \{1; 2; ...; p\}$ est égale à ka_{ij}.

Exemple :

La matrice $3A$ est égale à : $3A = \begin{pmatrix} 3 & 15 & -9 \\ 9 & 12 & 21 \end{pmatrix}$

Propriétés :

Soit α et β deux réels et A et B deux matrices de même dimension. Alors :

- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

2.3 Différence

Définitions :

- La matrice *opposée* de la matrice A est la matrice notée $-A$ dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j pour tout $i \in \{1; 2; ...; m\}$ et tout $j \in \{1; 2; ...; p\}$ est égale à $-a_{ij}$;
- La matrice *différence* d'une matrice A par une matrice B est la matrice notée $A - B$ et définie par $A - B = A + (-B)$;
- La matrice *nulle* est la matrice notée 0 dont tous les coefficients sont égaux à 0.

Propriétés :

Pour toute matrice A :

- $A + (-A) = (-A) + A = 0$;
- $A + 0 = 0 + A = A$;
- $0 \times A = 0$;

2.4 Produit de matrices

Définition :

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1,p} \end{pmatrix}$ un vecteur ligne et $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ ... \\ b_{p,1} \end{pmatrix}$ un vecteur colonne comportant p lignes.

Alors le produit $A \times B$ est égal au réel

$$\sum_{k=0}^{k=p} a_{1,k} b_{k,1} = a_{1,1} b_{1,1} + a_{1,2} b_{2,1} + ... + a_{1,p} b_{p,1}$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \times 3 + 6 \times 5 + 2 \times (-2) + 1 \times 3 = 41$$

Définition : produit de deux matrices :
Soit A une matrice de dimensions $m \times p$ et B une matrice de dimensions $p \times q$. LE produit de la matrice A par la matrice B, noté $A \times B$ ou AB est la matrice C de dimensions $m \times q$ telle que pour tout $i \in \{1;2;...;m\}$ et tout $j \in \{1;2;...;q\}$, le coefficient c_{ij} est égal au produit de la ligne i de A par la colonne j de B, c'est à dire :

$$c_{ij} = \sum_{k=0}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \times 1 + 4 \times 3 + 5 \times 5 & 3 \times 2 + 4 \times 4 + 5 \times 6 \\ -2 \times 1 + 6 \times 3 + 4 \times 5 & -2 \times 2 + 6 \times 4 + 4 \times 6 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 + 12 + 25 & 6 + 16 + 30 \\ -2 + 18 + 20 & -4 + 24 + 24 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 40 & 52 \\ 36 & 44 \end{pmatrix}$$

Propriétés :
Soit A, B et C trois matrices telles que toutes les sommes et les produits suivants existent . Alors :

- $(AB)C = A(BC)$: le produit de matrices est *associatif*;
- $A(B + C) = AB + AC$ et $(A + B)C = AC + BC$: produit de matrices est *distributif* par rapport à l'addition.

Remarque :
En général $AB \neq BA$: le produit de matrices *n'est pas commutatif*.

Définition :

On appelle *matrice identité d'ordre p* la matrice définie par $I_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Propriété :

Pour toute matrice A carrée d'ordre p, $AI_p = I_pA = A$.

2.5 Puissance

Définition :

Soit A une matrice carrée d'ordre p et n un entier naturel supérieur ou égal à 1. La *puissance n-ième* de la matrice A est la matrice carrée d'ordre p définie par :

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots A}_{n \quad \text{fois}}$$

En outre, par convention, on pose $A^0 = I_p$.

Exemple :

Si $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$

alors $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 5 \times (-5) & 1 \times 5 + 5 \times 9 \\ -5 \times 1 + 9 \times (-5) & -5 \times 5 + 9 \times 9 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -24 & 50 \\ -50 & 76 \end{pmatrix}$

Propriétés :

Soit A et B deux matrices carrées d'ordre p. Soit m et n deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 1. On a

- $A^m A^n = A^{m+n}$
- $(A^m)^n = A^{m \times n}$

Remarques :

Comme le produit matriciel n'est pas commutatif, en général $(A \times B)^n \neq A^n \times B^n$ et $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

Propriété :
Soit $D = (d_{i,j})$ une matrice carré diagonale, c'est à dire dont tous les coefficients $d_{i,j}$sont nuls sauf les termes $d_{i,i}$ pour $i \in \{1; 2; \cdots; p\}$. Alors D^n est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $d_{i,i}^n$.

Exemple :
Si $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ alors $D^2 = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

3 Matrice inverse et systèmes linéaires

Définition et propriété :
Soient A et A' des matrices d'ordre p. On dit que A' est la matrice *inverse de A* ou que A est inversible d'inverse A' si $AA' = A'A = I_p$. Si A est inversible, alors sa matrice inverse est unique. On note alors $A^{-1} = A'$.

Preuve de l'unicité :
Soit A'' une autre matrice vérifiant $AA'' = A''A = I_p$. De $AA' = I_p$ on déduit $A''AA' = A''$ et de $AA' = I$ on déduit $A''AA' = A'$ donc $A' = A''$.

Théorème :
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2. Alors A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ et on on a alors $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Exemple :
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
Comme $1 \times 4 - 2 \times 3 = -2 \neq 0$,
A est inversible d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$.

Définition :

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2. On appelle *Déterminant* de la matrice A le nombre $det(A) = ad - bc$. A est donc inversible si et seulement si son déterminant est non nul d'après le théorème précédent et $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Propriété : écriture matricielle d'un système linéaire :

On considère un système linéaire de p équations à p inconnues x_1, x_2, ... ,x_p :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,p}x_p = b_p \end{cases}$$

On pose $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,p} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$.

ALors le système linéaire s'écrit $AX = B$.

Exemple :

Le système

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$$

s'écrit $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Propriété et définition :

On considère un système linéaire d'écriture matricielle

$$AX = B$$

où A est une matrice carrée d'ordre p *inversible*. Alors le système admet une solution unique donnée par

$$X = A^{-1}B$$

Un tel système est appelé *système de Cramer*.

Exemple :

Comme vu dans les exemples précédents, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, on a $\det(A) \neq 0$, A est inversible et d'inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$ donc le système a pour solution

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -2 \times 5 + 1 \times 6 \\ \frac{3}{2} \times 5 - \frac{1}{2} \times 6 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

4 Matrices et transformations du plan

4.1 Transformations du plan

Définition, translation, symétries, rappels :
Les définitions suivantes sont valides dans le plan ou dans l'espace.

- Soit $\vec{u}$ un vecteur.On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ la transformation du plan ou de l'espace qui, à tout point M associe le point M' tel que $M\vec{M}' = \vec{u}$.
- Soit d une droite. On appelle symétrie axiale par rapport à une droite d la transformation du plan ou de l'espace qui, à tout point M associe le point M' tel que d soit la médiatrice de $[MM']$.
- Soit O un point. On appelle symétrie de centre O la transformation qui, à tout point M, associe le point M' tel que O est le milieu de $[MM']$.

Définition, homothétie :
Soit O un point de l'espace ou du plan et k un réel. On appelle homothétie de centre O et de rapport k la transformation qui, à tout point M, associe le point M' tel que $O\vec{M}' = kO\vec{M}$.

Définition, rotation :
Soit O un point du plan et θ un réel. On appelle rotation de centre O et d'angle θ dans le sens direct, la transformation qui, à tout point M, associe le point M' tel que $(O\vec{M}; O\vec{M}') = \theta$ et $OM = OM'$.

4.2 Lien avec les matrices

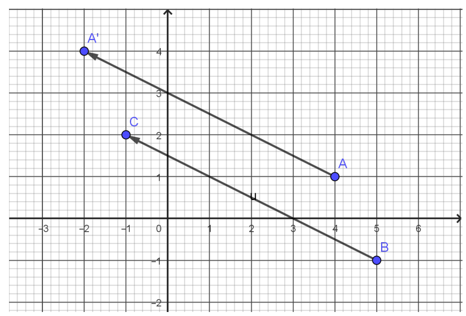
Propriété :

Dans un repère du plan, on considère la translation de vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Pour tout point M de coordonnées $(x; y)$ du plan, l'image M' a pour coordonnées $(x'; y')$ tel que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Exemple :

Ci-contre, pour $M(x; y)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ on obtient $M'(x-6; y+3)$.
En particulier, pour $A(4; 1)$ on a $A'(-2; 4)$.



Propriété :

Pour les transformations géométriques du plan suivantes, on associe la matrice dite de transformation $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ qui à tout point $M\,(x;y)$ associe le point image $M'(x';y')$ tel que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Pour une symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- pour une symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées

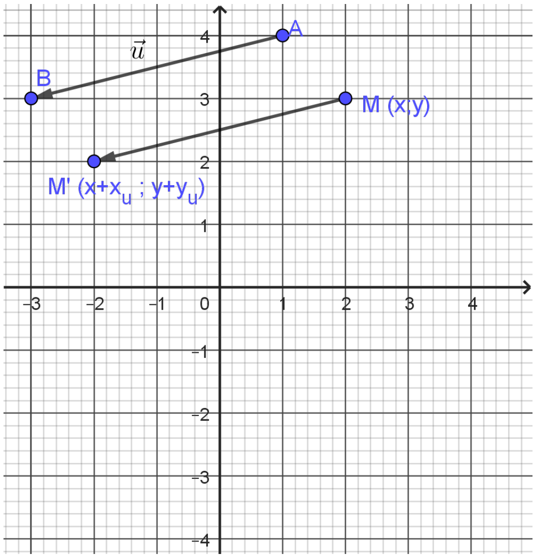
$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Pour une homothétie de centre O et de rapport k réel,

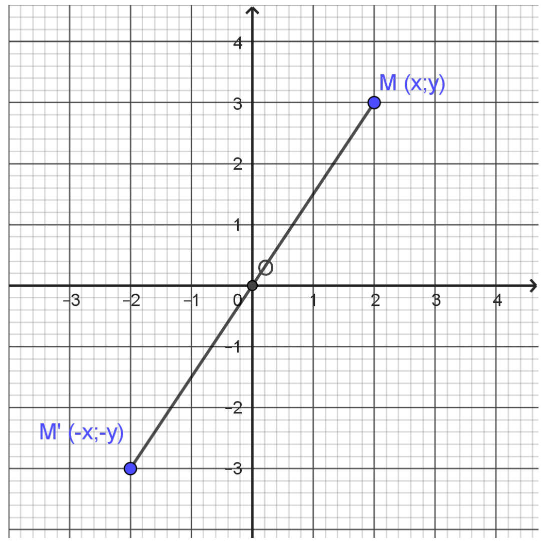
$$T = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

- Pour une rotation de centre O et d'angle θ,

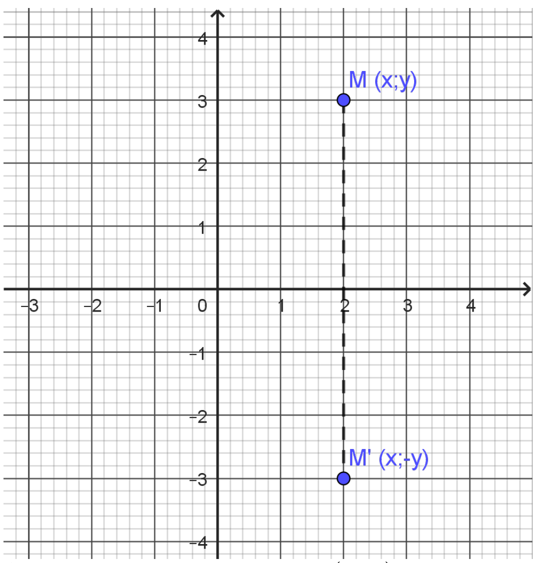
$$T = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$



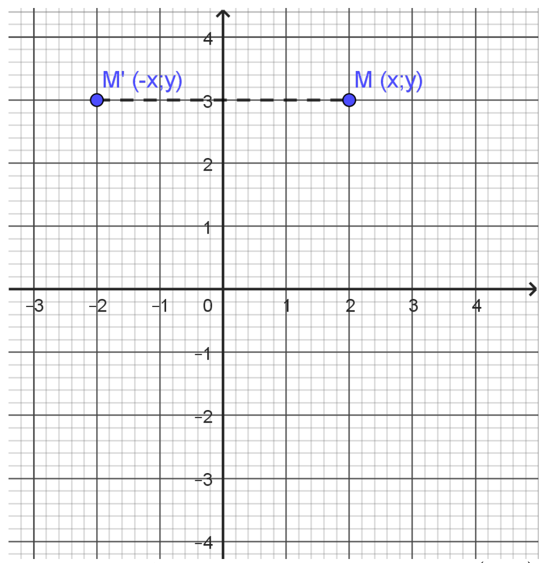
Translation



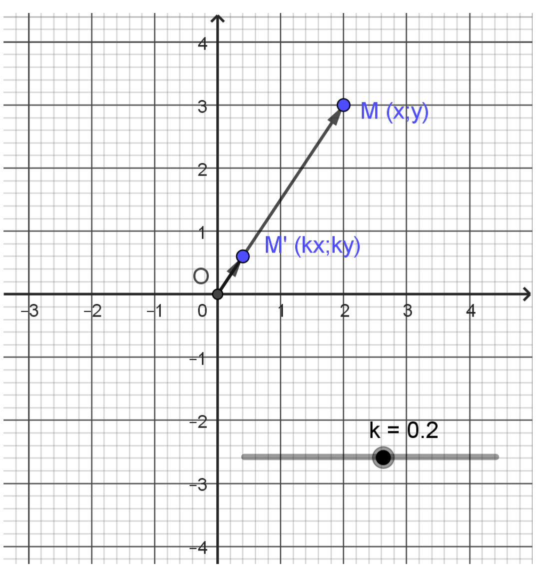
Symétrie centrale



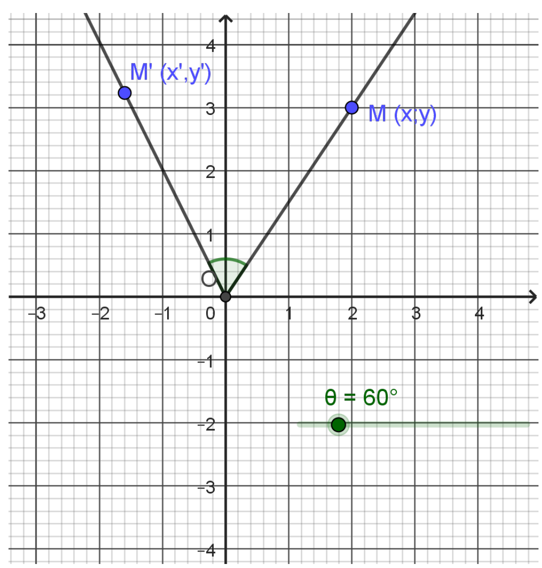
Symétrie par rapport à (Ox)



Symétrie par rapport à (Oy)



Homothétie



Rotation

Exemple :

La matrice associée à une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ est

$T = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{3}) & -\sin(\frac{\pi}{3}) \\ \sin(\frac{\pi}{3}) & \cos(\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix}$

donc $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Pour tout point $M(x;y)$ d'image $M'(x';y')$ par cette rotation on a donc

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{pmatrix}$

En particulier, pour $A(4;1)$ on obtient $A'(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}; 2\sqrt{3} + \frac{1}{2})$.