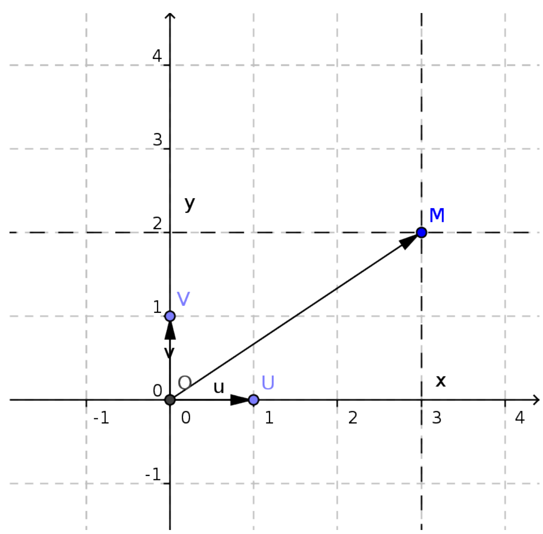
Nombres complexes, approche graphique et trigonométrique, cours, classe de terminale mathématiques expertes

1 Représentation géométrique des nombres complexes

Définition :

Soit $(O;\vec{u};\vec{v})$ un repère orthonormé du plan.

- Á tout nombre complexe $z = a + ib$ avec a et b réels, on associe le point M de coordonnées $(a;b)$. On dit que M est *le point image de z* et que $\vec{OM}$ est *le vecteur image de z*.
- Tout point M de coordonnées $(x;y)$ est le point image d'un unique complexe $z = x + iy$. On dit que z est l'affixe du point M et du vecteur $\vec{OM}$.



Remarques :

- Les nombres réels sont les affixes des points de l'axe des abscisses qui est pour cette raison aussi appelé *axe réel*.
- Les nombres imaginaires purs sont les affixes des points de l'axe des ordonnées qui est pour cette raison aussi appelé *axe imaginaire pur*.

Propriétés :

On considère deux points A et B du plan complexe muni d'un repère $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'affixes respectives z_A et z_B, alors

- le vecteur $\vec{AB}$ a pour affixe

$$z_B - z_A$$

- L'affixe du milieu I de $[AB]$ est

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

Preuve :

- A et B ont pour coordonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ dans $(O; \vec{u}; \vec{v})$ et par ailleurs, $z_A = x_A + iy_A$ et $z_B = x_B + iy_B$. Le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A)$ dans le repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ et donc pour affixe $(x_B - x_A) + i(y_B - y_A)$ dans ce repère.
  Or $z_B - z_A = x_B + iy_B - (x_A + iy_A) = x_B - x_A + i(y_B - y_A)$.
- On sait que $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$ et $y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$ et $z_I = x_I + iy_I$.
  Or $\frac{z_A + z_B}{2} = \frac{x_A + iy_A + x_B + iy_B}{2} = \frac{x_B + x_A + i(y_A + y_B)}{2}$.

2 Module d'un nombre complexe

Définition :

Soit $z = a + ib$ avec a et b réels un nombre complexe. On appelle *module de z* le nombre noté $|z|$ défini par

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Dans le plan complexe muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$, si M est l'image de z, alors

$$OM = |z|$$

Remarque :

Si x est un nombre réel, alors le module de x et la valeur absolue de x sont égaux, d'où l'utilisation de la même notation.

Exemple :

Si $z = -3 + \sqrt{3}i$ alors $|z| = \sqrt{(-3)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{9 + 3} = 2\sqrt{3}$.

Propriétés :

Pour tous les nombres complexes z et z' :

- $|\overline{z}| = |z|$ et $|-z| = |z|$;
- $|zz'| = |z||z'|$;
- pour tout entier naturel n, $|z^n| = |z|^n$;
- $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$;
- $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$.

Preuve :

- Évident.
- Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes avec a, b, a' et b' des réels.
  D'une part, on a $zz' = aa' - bb' + i(a'b + ab')$ donc $|zz'|^2 = (aa' - bb')^2 + (a'b + ab')^2$ d'où $|zz'|^2 = a^2a'^2 - 2aa'bb' + b^2b'^2 + a'^2b^2 + 2aa'bb' + a^2b'^2 = a^2a'^2 + b^2b'^2 + a^2b'^2 + a'^2b^2$.
  D'autre part, on a $|z|^2 = a^2 + b^2$ et $|z'|^2 = a'^2 + b'^2$ donc $(|z||z'|)^2 = (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = aa'^2 + a^2b'^2 + a'^2b^2 + a^2b'^2$.
  D'où l'égalité $|zz'|^2 = (|z||z'|)^2$ et l'égalité voulue.

- Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Initialisation : pour $n = 0$, $|z^0| = |1| = |z|^0$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$. Hérédité : On suppose que pour un rang $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$, alors $|z^{n+1}| = |z^n z| = |z^n||z|$ d'après la propriété précédente. Puisque par hypothèse de récurrence, $|z^n| = |z|^n$, alors $|z^{n+1}| = |z|^n|z| = |z|^{n+1}$. C'est la propriété au rang $n + 1$.
Conclusion : Puisque l'initialisation et l'hérédité sont vraie, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|z^n| = |z|^n$.
- Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes avec a, b, a' et b' des réels.
D'une part $\frac{z}{z'} = \frac{a+ib}{a'+ib'} = \frac{(a+ib)(a'-ib')}{(a'+ib')(a'+ib')} = \frac{aa'+bb'+i(ba'-ab')}{a'^2+b'^2}$ d'où $|\frac{z}{z'}|^2 = (\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2})^2 + (\frac{ba'-ab'}{a'^2+b'^2})^2 = \frac{a^2a'^2+b^2b'^2+b^2a'^2+a^2b'^2}{(a'^2+b'^2)^2} = \frac{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)}{(a'^2+b'^2)^2} = \frac{a^2+b^2}{a'^2+b'^2}$.
D'autre part, $(\frac{|z|}{|z'|})2 = \frac{(a^2+b^2)}{(a'^2+b'^2)}$.
D'où l'égalité.
- $z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.

Propriété, inégalité triangulaire :

> Si z et z' appartiennent à $\mathbb{C}$, $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.
> Il y a égalité si et seulement si $z = 0$ ou $z' = 0$ ou $\frac{z}{z'} \in \mathbb{R}_+$

Preuve :
D'une part, $|z+z'|^2 = (z+z')\overline{(z + z')} = (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) = z\bar{z}+z'\bar{z}+\bar{z'}z+z'\bar{z'} = |z|^2+|z'|^2+\bar{z}z'+\overline{\bar{z}z'} = |z|^2 + |z'|^2 + 2\Re(\bar{z}z')$.
D'autre part, $(|z| + |z'|)^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2|zz'| = |z|^2 + |z'|^2 + 2|\bar{z}z'|$
Or $\Re(\bar{z}z') \leq |\bar{z}z'|$ d'où $|z + z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2$ et $|z + z'| \leq (|z| + |z'|)$.
On a l'égalité si et seulement si $\Re(\bar{z}z') = |\bar{z}z'|$ c'est à dire si et seulement si $\Im(\bar{z}z') = 0$ et $\Re(\bar{z}z') > 0$ c'est à dire $\bar{z}z' \in \mathbb{R}$ et $\Re(\bar{z}z') > 0$ c'est à dire encore $\bar{z}z' \in \mathbb{R}_+$.
Or $\frac{z'}{z} = \frac{z'\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{z'\bar{z}}{|z|^2}$
Donc $\bar{z}z' \in \mathbb{R}_+$ si et seulement si $\frac{z'}{z} \in \mathbb{R}_+$.

Propriétés :

> Dans le plan complexe muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$, soient A et B sont deux points d'affixes respectives z_A et z_B. Alors :
> - $AB = |z_B - z_A|$;
> - L'ensemble des points M du plan d'affixe z tels $|z - z_A| = |z - z_B|$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

Preuve :
- Soit M tel que $\vec{OM} = \vec{AB}$. M a pour affixe $z_B - z_A$ et $OM = |z| = |z_B - z_A|$.
- $|z - z_A| = |z - z_B|$ se traduit par $AM = BM$ c'est à dire que M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.

Définition :

> On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Propriété :

L'ensemble $\mathbb{U}$ est stable par la multiplication et le passage à l'inverse, c'est à dire :

- Si $z \in \mathbb{U}$ et $z' \in \mathbb{U}$ alors $zz' \in \mathbb{U}$;
- Si $z \in \mathbb{U}$ alors $z \neq 0$ et $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$.

Preuve :

- $|zz'| = |z||z'| = 1$;
- $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|} = 1$.

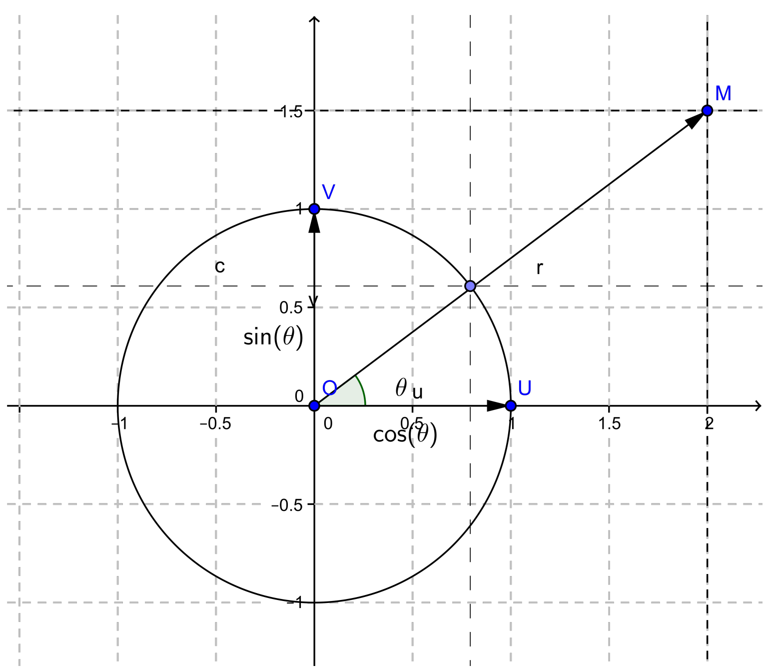
3 Module, argument et forme trigonométrique d'un nombre complexe

Définition :

Dans le plan complexe muni d'un repère $(O;\vec{u};\vec{v})$. Soit $z \in \mathbb{C}$ non nul d'image M on appelle *argument de z* et on note $\arg(z)$ tout mesure en radians de l'angle orienté :

$$(\vec{u};\vec{OM})$$

Si θ est une mesure de cet angle orienté, on note $\arg(z) = \theta \pmod{2\pi}$ ou plus simplement $\arg(z) = \theta$.



Propriété et définition :

Soit z un nombre complexe non nul.

- L'écriture
$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$
avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$ est appelé *forme trigonométrique de z*.
- Réciproquement, si $z = \rho(\cos(\alpha)) + i\sin(\alpha))$ avec $\rho > 0$ alors $|z| = \rho$ et $\arg(z) = \alpha$.
- Si $z = x + iy$ alors
$$\cos\theta = \frac{x}{|z|}$$
et
$$\sin\theta = \frac{y}{|z|}$$

Exemple :
Recherche du module et d'un argument de $z = 1 - i$:

- $|z| = |1 - i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$;
- Soit θ un argument de $1 - i$.
  $\cos(\theta) = \frac{x}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
  $\sin(\theta) = \frac{y}{|z|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
  D'où $\theta = -\frac{\pi}{4}$ d'après les angles associés à $\frac{\pi}{4}$ dans le cercle trigonométrique.

Propriétés :

Pour tout nombre complexe z non nul :

- $\arg \overline{z} = -\arg z$;
- z est réel $\Leftrightarrow \arg(z) = 0\,(2\pi)$ ou $\arg z = \pi\,(2\pi) \Leftrightarrow \arg z = 0\,(\pi)$;
- z est imaginaire $\Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{2}\,(2\pi)$ ou $\arg z = -\frac{\pi}{2}\,(2\pi) \Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{2}\,(\pi)$.

Propriétés :

Pour tous les nombres complexes z et z' :

- $|zz'| = |z||z'|$;
- pour tout entier naturel n, $|z^n| = [z|^n$;
- Si $z' \neq 0$, $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$;

Pour tous les nombres complexes z et z' non nuls :

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\,(2\pi)$;
- $\arg(z^n) = n\arg(z)\,(2\pi)$ pour tout entier naturel n non nul ;
- $\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z')\,(2\pi)$.

Preuve :

- Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.
  Alors $zz' = rr'(\cos\theta\cos\alpha + i\sin\theta\cos\alpha + i\sin\alpha\cos\theta - \sin\theta\sin\alpha)$
  c'est à dire $zz' = rr'(\cos(\theta + \alpha) + i\sin(\theta + \alpha))$ donc $|zz'| = rr'$ et $\arg(zz') = \theta + \alpha$.
- Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
  Initialisation : pour $n = 1$, $|z^1| = |z| = |z|^1$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$. Hérédité : si pour un rang $n \in \mathbb{N}^*$, $|z^n| = |z|^n$, alors $|z^{n+1}| = |z^n z| = |z^n||z|$ d'après la propriété précédente. Puisque par hypothèse de récurrence, $|z^n| = |z|^n$, alors $|z^{n+1}| = |z|^n|z| = |z|^{n+1}$. C'est la propriété au rang $n + 1$ Conclusion : Puisque l'initialisation et l'hérédité sont vraie, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|z^n| = |z|^n$.
- Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
  Initialisation : pour $n = 1$, $\arg(z^1) = \arg(z) = \arg(z)^1$ donc la propriété est vraie au rang $n = 1$. Hérédité : On suppose que pour un rang $n \in \mathbb{N}^*$, $\arg(z^n) = n\arg(z)$, alors $\arg(z^{n+1}) = \arg(z^n z) = \arg(z^n) + \arg(z)$ d'après la première propriété. Puisque par hypothèse de récurrence, $\arg(z^n) = n\arg(z)$ donc $\arg(z^{n+1}) = n\arg(z) + \arg(z) = (n+1)\arg(z)$: c'est la propriété au rang $n + 1$.
  Conclusion, puisque l'initialisation et l'hérédité sont vraies, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\arg(z^n) = n\arg(z)$.

- En remarquant que $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$ et en utilisant la première propriété, on en déduit qu'il suffit de montrer que $\arg(\frac{1}{z'}) = -\arg z'$.
  Or $\frac{1}{z'} = \frac{1}{r'(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))} = \frac{\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)}{r'(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))(\cos(\alpha)-i\sin(\alpha))}$
  D'où $\frac{1}{z'} = \frac{\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)}{r'(\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha))} = \frac{1}{r'}(\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)) = \frac{1}{r'}(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha))$
  D'où $\frac{1}{z'}$ a pour module $\frac{1}{r'}$ et pour argument $-\alpha$ c'est à dire $-\arg z'$.

Propriétés :

Dans le plan complexe muni d'un repère $(O;\vec{u};\vec{v})$, soient A et B sont deux points d'affixes respectives z_A et z_B. Alors :
- $AB = |z_B - z_A|$;
- $(\vec{u};\vec{AB}) = \arg(z_B - z_A)(2\pi)$.
- Si C et D sont deux autres points d'affixes respectives z_C et z_D, $\arg\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A} = (\vec{AB};\vec{CD})(2\pi)$.

Preuve :
- Soit M le point tel que $\vec{OM} = \vec{AB}$. On a donc $z_M - z_O = z_B - zA$ donc $z_M = z_B - z_A$ et $AB = OM = |z_M| = |z_B - z_A|$.
- En outre $(\vec{u};\vec{AB}) = (\vec{u};\vec{OM}) = \arg(z_M)(2\pi) = \arg(z_B - z_A)(2\pi)$.
- $\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A)$
  $= (\vec{u};\vec{CD}) - (\vec{u};\vec{AB}) = (\vec{u};\vec{CD}) + (\vec{AB};\vec{u}) = (\vec{AB};\vec{u}) + (\vec{u};\vec{CD})$
  $= (\vec{AB};\vec{CD})(2\pi)$.

4 Notation exponentielle

Définition et propriété :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ par $f(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

- Pour tous les réels θ et θ', on a $f(\theta+\theta') = f(\theta)f(\theta')$.
- On dit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que f' est définie par : $f'(\theta) = \cos'(\theta) + i\sin'(\theta) = -\sin(\theta) + i\cos(\theta)$
- On a $f'(\theta) = if(\theta)$, $f(0) = 1$ et $f'(0) = i$.

Preuve :
Seul le premier point n'est pas immédiat. D'une part,

$$\begin{aligned} f(\theta+\theta') &= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') \\ &= \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + i(\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta')) \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} f(\theta)f(\theta') &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))(\cos(\theta') + i\sin(\theta')) \\ &= \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + i(\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta')) \end{aligned}$$

D'où l'égalité.

Définition :

D'après ce qui précède, par analogie avec la fonction exponentielle, on pose pour tout réel θ :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Soit z un nombre complexe non nul. L'écriture

$$z = re^{i\theta}$$

où $r = |z|$ et θ est un argument de z est appelée *forme exponentielle* de z.

Propriétés :

Pour tous les réels θ et θ' et tout entier naturel n non nul :

- $|e^{i\theta}| = 1$ et $\arg(e^{i\theta}) = \theta$;
- $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$;
- $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$;
- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$;
- $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ c'est à dire

  $$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$$

  formule appelée formule de *Moivre*.

Preuve :

- $|e^{i\theta}| = |\cos(\theta)+i\sin(\theta)|$ par définition. Par ailleurs, $|\cos(\theta)+i\sin(\theta)|^2 = (\cos(\theta))^2+(\sin(\theta))^2 = 1$.
- $e^{i\theta}e^{i\theta'} = f(\theta)f(\theta') = f(\theta+\theta') = e^{i(\theta+\theta')}$
- $e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^{i\theta-i\theta} = e^0 = 1$ donc $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$ et $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i\theta}\frac{1}{e^{i\theta'}} = e^{i\theta}e^{-i\theta'}$
- $\overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos(\theta)+i\sin(\theta)} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$ et $e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$ d'où l'égalité.
- On le montre par récurrence en utilisant le deuxième point.

5 Applications à la trigonométrie

Propriété, formule du binôme de Newton :

Soit a et b deux nombres complexes. Pour tout entier naturel n, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Preuve :
Par récurrence.
Initialisation : Pour $n=0$, on a $(a+b)^0=1$ et $\sum_{k=0}^{k=0}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}a^kb^{0-k}=a^0b^0=1$ d'où l'égalité. **Hérédité :**
On suppose que pour un rang $p\in\mathbb{N}$ $(a+b)^p=\sum_{k=0}^{k=p}\begin{pmatrix}p\\k\end{pmatrix}a^kb^{p-k}$.
Alors $(a+b)^{p+1}=(a+b)(a+b)^p=(a+b)\sum_{k=0}^{k=p}\begin{pmatrix}p\\k\end{pmatrix}a^kb^{p-k}$
$(a+b)^{p+1}=a\sum_{k=0}^{k=p}\begin{pmatrix}p\\k\end{pmatrix}a^kb^{p-k}+b\sum_{k=0}^{k=p}\begin{pmatrix}p\\k\end{pmatrix}a^kb^{p-k}$
$=\sum_{k=0}^{k=p}\begin{pmatrix}p\\k\end{pmatrix}a^{k+1}b^{p-k}+\sum_{k=0}^{k=p}\begin{pmatrix}p\\k\end{pmatrix}a^kb^{p+1-k}$
$=\sum_{j=1}^{k=p+1}\begin{pmatrix}p\\j-1\end{pmatrix}a^jb^{p-(j-1)}+\sum_{k=0}^{k=p}\begin{pmatrix}p\\k\end{pmatrix}a^kb^{p+1-k}$ en posant $j=k+1$
$=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}a^0b^{p+1}+\sum_{k=1}^{k=p}(\begin{pmatrix}k-1\\p\end{pmatrix}a^kb^{p+1-k}+\begin{pmatrix}p\\k\end{pmatrix}a^kb^{p+1-k})+\begin{pmatrix}p\\p\end{pmatrix}a^{p+1}b^0$
$=b^{p+1}+\sum_{k=1}^{k=p}(\begin{pmatrix}p\\k-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}p\\k\end{pmatrix})a^kb^{p+1-k}+a^{p+1}$
$=b^{p+1}+\sum_{k=1}^{k=p}\begin{pmatrix}p+1\\k\end{pmatrix}a^kb^{p+1-k}+a^{p+1}=\sum_{k=0}^{k=p+1}\begin{pmatrix}p+1\\k\end{pmatrix}a^kb^{p+1-k}$ d'où l'hérédité.
Conclusion : Par récurrence, pour tout entier naturel n, $\sum_{k=0}^{k=p}\begin{pmatrix}p\\k\end{pmatrix}a^kb^{p-k}$

Propriété, formules d'Euler :

Pour tous les réels θ, $\cos(\theta)=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta)=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}$.

Preuve :
On a $e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$ et $e^{-i\theta}=\cos(-\theta)+i\sin(\theta)=\cos(\theta)-i\sin(\theta)$
D'où par addition terme à terme :
$e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos(\theta)$ et par soustraction terme à terme : $e^{i\theta}-e^{-i\theta}=2\sin(\theta)$.

Exemple d'utilisation pour linéariser :
$\cos^4(x)=(\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}))^4$ d'après les formules d'Euler.
D'où $\cos^4(x)=\frac{1}{16}(e^{ix}+e^{-ix})^4=\frac{1}{16}(e^{4ix}+4e^{3ix}e^{-ix}+6e^{2ix}e^{-2ix}+4e^{ix}e^{-3ix}+e^{-4ix})$
d'après la formule du binôme de Newton.
D'où $\cos^4(x)=\frac{1}{16}(e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-ix}+e^{-4ix})=\frac{1}{16}(e^{4ix}+e^{-4ix})+\frac{4}{16}(e^{2ix}+e^{-2ix})+\frac{6}{16}$
$=\frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}$
d'après les formules d'Euler à nouveau.

Définition et propriété :

Soit $n\in\mathbb{N}$. On appelle $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des complexes z tels que $z^n=1$.
On a $\mathbb{U}_n=\{e^{\frac{2ki\pi}{n}},\quad k\in\{0;2;...;n-1\}\}$.

Preuve :
$z\in\mathbb{U}_n$ si et seulement si $z^n=1$ c'est à dire $e^{in\theta}=1$ où $\theta\in\mathbb{R}$
ce qui équivaut encore à $n\theta=0+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$

c'est à dire encore $\theta = \frac{2k\pi}{n}, \qquad k \in \mathbb{Z}$.
Or, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, il existe des entiers relatifs q et r avec $r \in \{0; 1; 2; ...; n-1\}$ tels que $k = qn + r$ par division euclidienne de k par n.
D'où $e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2qn\pi}{n}} e^{i\frac{2r\pi}{n}} = e^{i2q\pi} e^{i\frac{2r\pi}{n}} = e^{i\frac{2r\pi}{n}}$ avec $r \in \{0; 1; 2; ....; n-1\}$.

Propriété (formules d'addition) :

Quels que soient les réels a et b,

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$$

$$\sin(a-b) = \cos(a)\sin(b) - \sin(a)\cos(b)$$

Preuve :

Soit $\mathcal{C}$ un cercle trigonométrique de centre O et muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ direct. A et B sont les points du cercle tels que $(\vec{i}; \vec{OA}) = a$ et $(\vec{i}; \vec{OB}) = b$ en radians. $\vec{OA}$ a donc pour coordonnées $(\cos a; \sin a)$ et $\vec{OB}$ a pour coordonnées $(\cos b; \sin b)$. D'après la relation de Chasles pour les angles orientés on a : $(\vec{OA}; \vec{OB}) = (\vec{OA}; \vec{i}) + (\vec{i}; \vec{OB})$ donc $(\vec{OA}; \vec{OB}) = b - a$.

Or $\vec{OA}.\vec{OB} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ d'une part et $\vec{OA}.\vec{OB} = OA \times OB \times \cos(\vec{OA}; \vec{OB}) = OA \times OB \times \cos(b-a)$ d'autre part. D'où la formule $\cos(b-a) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

La formule

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

s'obtient en prenant $-a$ au lieu de a.

On a en outre

$$\begin{aligned}\sin(a+b) = \cos(\frac{\pi}{2} - (a+b)) &= \cos(\frac{\pi}{2} - a)\cos(-b) + \sin(\frac{\pi}{2} - a)\sin(-b) \\ &= \sin a \cos b + \cos a \sin b\end{aligned}$$

et la dernière formule s'en déduit.

Propriété (formules de duplication) :

Pour tous les réels a on a :

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$$

et

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(b)$$

mais aussi

$$\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$$

et

$$\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$$

Preuve :
La première égalité vient de la première formule d'addition en prenant $b = a$ et la deuxième égalité vient de la troisième formule d'addition en prenant aussi $a = b$.

Les deux dernières égalités s'obtiennent à partir de la première en utilisant la formule $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$.

6 Application des nombres complexes à la géométrie

Propriété :

Soit f la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z'.

- Si $z' = z + b$ où $b \in \mathbb{C}$, alors f est la translation de vecteur ayant pour affixe b.
- Si $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ où $\omega \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors f est la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ.
- Si $z' - \omega = k(z - \omega)$ où $k \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{R}*$, alors f est l'homothétie de centre Ω, d'affixe ω et de rapport k.

Preuve :

- $z' = z + b$ s'écrit $z' - z = b$ c'est à dire $z_{M\vec{M'}} = b$ ce qui s'interprète géométriquement par M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b.