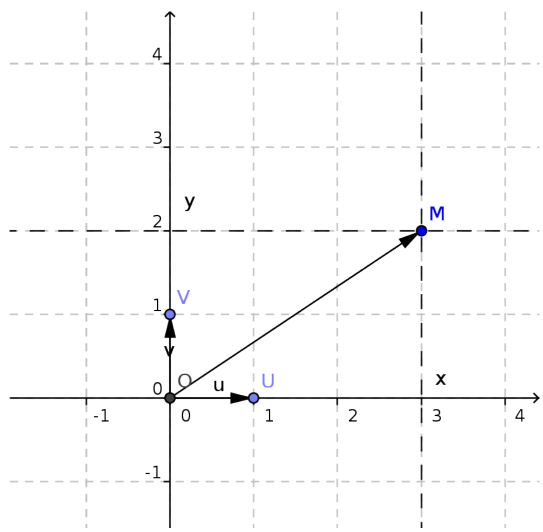
Nombres complexes, approche graphique et trigonométrique, cours, classe de terminale mathématiques expertes

1 Représentation géométrique des nombres complexes

Définition :

Soit $(O;\vec{u};\vec{v})$ un repère orthonormé du plan.

- Á tout nombre complexe $z = a + ib$ avec a et b réels, on associe le point M de coordonnées $(a;b)$. On dit que M est le .... de z et que $\vec{OM}$ est le .... de z.
- Tout point M de coordonnées $(x;y)$ est le point image d'un unique complexe $z = x+iy$. On dit que z est .... du point M et du vecteur $\vec{OM}$.



Remarques :

- Les nombres réels sont les affixes des points de l'axe .... qui est pour cette raison aussi appelé ....
- Les nombres imaginaires purs sont les affixes des points de l'axe .... qui est pour cette raison aussi appelé ....

Propriétés :

On considère deux points A et B du plan complexe muni d'un repère $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'affixes respectives z_A et z_B, alors

- le vecteur $\vec{AB}$ a pour affixe

....

- L'affixe du milieu I de $[AB]$ est

...

Preuves :
...

2 Module d'un nombre complexe

Définition :

Soit $z = a + ib$ avec a et b réels un nombre complexe. On appelle *module de z* le nombre noté $|z|$ défini par

...

Dans le plan complexe muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$, si M est l'image de z, alors $OM =$ ....

Remarque :
Si x est un nombre réel, alors le module de x et la valeur absolue de x sont égaux, d'où l'utilisation de la même notation.

Exemple :
Si $z = -3 + \sqrt{3}i$, calcul de $|z|$:
...
...
...

Propriétés :

Pour tous les nombres complexes z et z' :
- $|\overline{z}| =$...... et $|-z| =$......
- $|zz'| =$.....
- pour tout entier naturel n, $|z^n| =$....
- $|\frac{z}{z'}| =$....
- $z\overline{z} =$....

Preuves :
...

Propriété, inégalité triangulaire :

Si z et z' appartiennent à $\mathbb{C}$, $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.
Il y a égalité si et seulement si $z = 0$ ou $z' = 0$ ou $\frac{z}{z'} \in \mathbb{R}_+$

Preuve :
...

Propriétés :

Dans le plan complexe muni d'un repère $(O;\vec{u};\vec{v})$, soient A et B sont deux points d'affixes respectives z_A et z_B. Alors :

- $AB =$.......
- L'ensemble des points M du plan d'affixe z tels $|z - z_A| = |z - z_B|$ est ....

Preuves :

...
...
...
...

Définition :

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Propriété :

L'ensemble $\mathbb{U}$ est stable par la multiplication et le passage à l'inverse, c'est à dire :

- Si $z \in \mathbb{U}$ et $z' \in \mathbb{U}$ alors $zz' \in \mathbb{U}$;
- Si $z \in \mathbb{U}$ alors $z \neq 0$ et $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$.

Preuves :

...
...
...
...

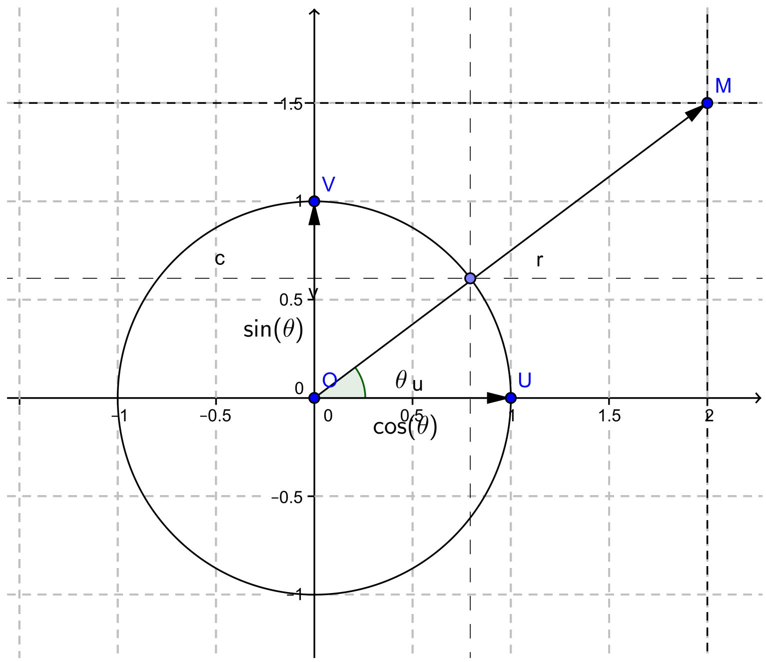
3 Module, argument et forme trigonométrique d'un nombre complexe

Définition :

Dans le plan complexe muni d'un repère $(O;\vec{u};\vec{v})$. Soit $z \in \mathbb{C}$ non nul d'image M on appelle *argument de z* et on note $\arg(z)$ tout mesure en radians de l'angle orienté :

$$(\vec{u};\vec{OM})$$

Si θ est une mesure de cet angle orienté, on note $\arg(z) = \theta \pmod{2\pi}$ ou plus simplement $\arg(z) = \theta$.



Propriété et définition :

Soit z un nombre complexe non nul.

- L'écriture

$$\ldots$$

avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$ est appelé *forme trigonométrique de z*.
- Réciproquement, si $z = \rho(\cos(\alpha)) + i\sin(\alpha))$ avec $\rho > 0$ alors $|z| =$.... et $\arg(z) =$....
- Si $z = x + iy$ alors

$$\cos\theta = \ldots$$

et

$$\sin\theta = \ldots$$

Exemple :
Recherche du module et d'un argument de $z = 1 - i$: ...
...
...
...
...
...

Propriétés :

Pour tout nombre complexe z non nul :
- $\arg \overline{z} = ...$;
- z est réel $\Leftrightarrow \arg(z) = ...\ (2\pi)$ ou $\arg z = ...\ (2\pi)$
  c'est à dire z réel $\Leftrightarrow \arg z = ...\ (\pi)$;
- z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg z = ...\ (2\pi)$ ou $\arg z = ...\ (2\pi)$
  c'est à dire z imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg z = ...\ (\pi)$.

Propriétés :

Pour tous les nombres complexes z et z' non nuls :
- $\arg(zz') =$...........
- $\arg(z^n) =$.................... pour tout entier naturel n non nul ;
- $\arg(\frac{z}{z'}) =$..................

Preuves :
....

Propriétés :

Dans le plan complexe muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$, soient A et B sont deux points d'affixes respectives z_A et z_B. Alors :
- $AB =$........ ;
- $(\vec{u}; \vec{AB}) =$...............
- Si C et D sont deux autres points d'affixes respectives z_C et z_D, $\arg \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} =$..................

Preuve :
...

4 Notation exponentielle

Définition et propriété :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ par $f(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

- Pour tous les réels θ et θ', on a $f(\theta + \theta') = f(\theta)f(\theta')$.
- On dit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que f' est définie par : $f'(\theta) = \cos'(\theta) + i\sin'(\theta) = -\sin(\theta) + i\cos(\theta)$
- On a $f'(\theta) = if(\theta)$, $f(0) = 1$ et $f'(0) = i$.

Preuve :
Seul le premier point n'est pas immédiat. D'une part,

$$\begin{aligned} f(\theta+\theta') &= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') \\ &= \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + i(\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta')) \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} f(\theta)f(\theta') &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))(\cos(\theta') + i\sin(\theta')) \\ &= \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + i(\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta')) \end{aligned}$$

D'où l'égalité.

Définition :

D'après ce qui précède, par analogie avec la fonction exponentielle, on pose pour tout réel θ :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Soit z un nombre complexe non nul.
L'écriture

...

où $r = |z|$ et θ est un argument de z est appelée *forme exponentielle* de z.

Propriétés :

Pour tous les réels θ et θ' et tout entier naturel n non nul :

- $|e^{i\theta}| =$..... et $\arg(e^{i\theta}) =$.....
- $e^{i\theta}e^{i\theta'} =$..........
- $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} =$......
- $\overline{e^{i\theta}} =$..............
- $\left(e^{i\theta}\right)^n =$ ....
  c'est à dire $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$
  formule appelée formule de *Moivre*.

Preuves :
...

5 Applications à la trigonométrie

Propriété, formule du binôme de Newton :

Soit a et b deux nombres complexes. Pour tout entier naturel n, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Preuve :
...

Propriété, formules d'Euler :

Pour tous les réels θ,

$$\cos(\theta) = ...$$

et

$$\sin(\theta) = ...$$

Preuve :
...

Exemple d'utilisation pour linéariser :
Linéarisation de $\cos^4(x)$:
...
...
...
...
...
...

Définition et propriété :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des complexes z tels que $z^n = 1$.
On a $\mathbb{U}_n = \{e^{\frac{2ki\pi}{n}}, \quad k \in \{0; 2; ...; n-1\}\}$.

Preuve :
$z \in \mathbb{U}_n$ si et seulement si $z^n = 1$ c'est à dire $e^{in\theta} = 1$ où $\theta \in \mathbb{R}$
ce qui équivaut encore à $n\theta = 0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
c'est à dire encore $\theta = \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}$.
Or, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, il existe des entiers relatifs q et r avec $r \in \{0; 1; 2; ...; n-1\}$ tels que $k = qn + r$ par division euclidienne de k par n.
D'où $e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2qn\pi}{n}} e^{i\frac{2r\pi}{n}} = e^{i2q\pi} e^{i\frac{2r\pi}{n}} = e^{i\frac{2r\pi}{n}}$ avec $r \in \{0; 1; 2; ....; n-1\}$.

Propriété (formules d'addition :

Quels que soient les réels a et b,

$$\cos(a+b) = ...$$

$$\cos(a-b) = ...$$

$$\sin(a+b) = ...$$

$$\sin(a-b) = ...$$

Preuve :
Soit $\mathcal{C}$ un cercle trigonométrique de centre O et muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ direct. A et B sont les points du cercle tels que $(\vec{i};\vec{OA}) = a$ et $(\vec{i};\vec{OB}) = b$ en radians. $\vec{OA}$ a donc pour coordonnées $(\cos a; \sin a)$ et $\vec{OB}$ a pour coordonnées $(\cos b; \sin b)$. D'après la relation de Chasles pour les angles orientés on a : $(\vec{OA};\vec{OB}) = (\vec{OA};\vec{i}) + (\vec{i};\vec{OB})$ donc $(\vec{OA};\vec{OB}) = b - a$.

Or $\vec{OA}.\vec{OB} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ d'une part et $\vec{OA}.\vec{OB} = OA \times OB \times \cos(\vec{OA};\vec{OB}) = OA \times OB \times \cos(b-a)$ d'autre part. D'où la formule $\cos(b-a) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

La formule

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

s'obtient en prenant $-a$ au lieu de a.

On a en outre

$$\begin{aligned}\sin(a+b) = \cos(\frac{\pi}{2} - (a+b)) &= \cos(\frac{\pi}{2} - a)\cos(-b) + \sin(\frac{\pi}{2} - a)\sin(-b)\\ &= \sin a \cos b + \cos a \sin b\end{aligned}$$

et la dernière formule s'en déduit.

Propriété (formules de duplication) :

Pour tous les réels a on a :

$$\cos(2a) = ...$$

et

$$\sin(2a) = ...$$

mais aussi

$$\cos(2a) = ...$$

et

$$\cos(2a) = ...$$

Preuve :
La première égalité vient de la première formule d'addition en prenant $b = a$ et la deuxième égalité vient de la troisième formule d'addition en prenant aussi $a = b$.

Les deux dernières égalités s'obtiennent à partir de la première en utilisant la formule $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$.

6 Application des nombres complexes à la géométrie

Propriété :

Soit f la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z'.

- Si $z' = z + b$ où $b \in \mathbb{C}$, alors f est ....
- Si $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ où $\omega \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors f est ....
- Si $z' - \omega = k(z - \omega)$ où $k \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{R}*$, alors f est ....

Preuves :

...