Nombres complexes, approche algébrique, terminale, mathématiques expertes

1 Notion de nombre complexe

On sait depuis les babyloniens résoudre les équations dites du second degré (c'est à dire de la forme $ax^2+bx+c=0$). Cependant, on est resté longtemps sans méthode générale de résolution des équations du troisième degré. Ce n'est qu'au XVI^{e} siècle qu'un mathématicien italien Tartaglia découvrit une méthode générale de résolution de ces équations. Il eut pour cela recourt à l'utilisation de ce qui fut qualifié à l'époque d'artifice : une racine carrée de -1, c'est à dire un nombre x imaginaire tel que $\sqrt{x}=-1$. Ce n'est que par la suite que ce nombre acquèrera sont statut de nombre, sera renommé i et donnera naissance aux nombres complexes qui seront étudiés en tant que nombres et permettront le développement de pans entiers des Mathématiques.

Définition :

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ et appelé *ensemble des nombres complexes* tel que :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels ;
- l'addition et la multiplication des nombres complexes « prolongent » l'addition et la multiplication des nombres réels. (c'est à dire que l'addition ou la multiplication de deux nombres réels considérés comme nombres complexes est l'addition ou la multiplication usuelle sur les nombres réels) ;
- Il existe un unique nombre complexe noté i tel que $i^2=-1$.
- Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique $z=a+ib$ où a et b sont deux nombres réels.

L'écriture $z=a+ib$ est appelée *forme algébrique* du nombre complexe z.
Le nombre réel a est appelé *partie réelle* du nombre complexe z et noté $\mathcal{R}e(z)$.
Le nombre réel b est appelé *partie imaginaire* du nombre complexe z et noté $\mathcal{I}m(z)$.
Si $a=0$, le nombre z s'écrit $z=ib$ avec $b\in\mathbb{R}$. On dit alors que z est un imaginaire pur.

Exemples :

Le réel 3 est aussi un nombre complexe, il s'écrit $3=3+0\times i$. Le nombre $3+2i$ est un nombre complexe non réel. Sa partie imaginaire est 2 et sa partie réelle est 3..

Remarque :

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

2 Opérations sur les nombres complexes

Définitions :

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes avec a, b, a' et b' réels.

- On appelle *opposé* de z et on note $-z$ le nombre $-z = -a - ib$.
- On définit *l'addition* des nombres complexes z et z' et on note $z+z'$ le nombre :

$$z + z' = a + a' + i(b + b')$$

- On définit la *soustraction* de z par z' par l'addition de l'opposé de z' au nombre z, c'est à dire en posant $z - z' = z + (-z')$
- On définit la *multiplication* des nombres complexes z et z' et on note zz' le nombre :

$$zz' = (a + ib)(a' + ib') = aa' - bb' + i(ab' + a'b)$$

- Tout nombre complexe non nul z admet un *inverse*, c'est à dire un nombre z' tel que $zz' = 1$, noté $z' = \frac{1}{z}$.
- Si $z' \neq 0$, on définit le *quotient* de z par z' noté $\frac{z}{z'}$ en posant $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$.
- On appelle *conjugué* de $z = a + ib$ le nombre noté $\bar{z}$ défini par $\bar{z} = a - ib$.

Remarque :

L'addition, la soustraction, la multiplication et le quotient dans les complexes prolongent l'addition, la soustraction, la multiplication et le quotient dans les réels car, si z et z' sont réels, c'est $z = a$ et $z' = a'$ avec a et a' réels, alors $z + z' = a + a'$ et $zz' = aa'$.

Exemples :

- $(3 + 2i) + (5 - 4i) = 8 - 2i$
- $(3+2i)(5-4i) = 3\times5+(2i)(-4i)+5\times2i-3\times4i = 15+8+10i-12i = 23-2i$

Propriétés :

Pour tous les nombres complexes z et z',

- $(z + z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2$
- $(z - z')^2 = z^2 - 2zz' + z'^2$
- $(z - z')(z + z') = z^2 - z'^2$
- $zz' = 0$ si et seulement si $z = 0$ ou $z' = 0$.

3 Conjugué d'un nombre complexe

Définition :

Pour tout nombre complexe z de forme algébrique $z = a + ib$ avec a et b réels, on appelle *conjugué de z* le nombre noté $\bar{z}$ et défini par $\bar{z} = a - ib$.

Exemple :

$\dfrac{3+2i}{5-4i} = \dfrac{(3+2i)(5+4i)}{(5-4i)(5+4i)} = \dfrac{15+10i+12i-8}{5^2-20i+20i+16} = \dfrac{7+22i}{41}$

On a multiplié par $5+4i$, conjugué de $5-4i$ pour obtenir un dénominateur réel et donc la forme algébrique du quotient.

Propriétés :

Soient z et z' deux nombres complexes.

- z est réel si et seulement $\bar{z} = z$;
- z est imaginaire pur si et seulement si $\bar{z} = -z$;
- $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}'$;
- $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$;
- pour tout entier naturel n, $\overline{z^n} = \bar{z}^n$;
- si $z \neq 0$, $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$;
- si $z \neq 0$, $\overline{\frac{z'}{z}} = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}}$;

Preuve

- Soit $z = a + ib$ avec a et b réels.
  $z = \bar{z}$ s'écrit $a + ib = a - ib$ c'est à $ib = -ib$
  ou encore $2ib = 0$ ce qui équivaut à $b = 0$
  c'est à dire $z = a$ réel.
- Soit $z = a + ib$ avec a et b réels.
  $\bar{z} = -z$ équivaut à $a - ib = -(a + ib)$
  c'est à dire $a - ib = -a - ib$ ce qui équivaut à $2a = 0$
  donc à $a = 0$.
- Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.
  $\bar{z} + \bar{z}' = a - ib + a' - ib' = a + a' - i(b + b') = \overline{z+z'}$.
- Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.
  D'une part, $\overline{zz'} = \overline{(a+ib)(a'+ib')} = \overline{aa' - bb' + iba' + ib'a} = aa' - bb' - i(ba' + b'a)$
  et d'autre part, $\bar{z}\bar{z}' = (a - ib)(a' - ib') = aa' - bb' - ia'b - iab' = aa' - bb - i(ba' + b'a)$
  d'où l'égalité.

- Initialisation : Vrai pour $n = 0$ car $z^0 = 1$.
  Hérédité : Si l'égalité $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ est vraie pour un rang $n \in \mathbb{N}$,
  alors pour $n+1$, on a $\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \times z}$.
  D'après la propriété précédente qui n'est autre que le cas où $n = 2$,
  on peut écrire que $\overline{z^{n+1}} = \bar{z^n}\bar{z}$.
  Or, par hypothèse de récurrence, on a $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$
  donc $\overline{z^{n+1}} = (\bar{z})^n\bar{z} = (\bar{z})^{n+1}$.
  Conclusion : La propriété est donc vraie au rang $n+1$ et par récurrence, on en déduit qu'elle est vraie pour tout rang $n \in \mathbb{N}$
- Soit $z = a + ib$,
  alors $\overline{\dfrac{1}{z}} = \overline{\dfrac{1}{a+ib}} = \overline{\dfrac{a-ib}{a^2+b^2}}$ en multipliant par $a - ib$ le dénominateur et le numérateur.
  Ceci est encore égal à $\dfrac{a+ib}{a^2+b^2}$.
  Par ailleurs, $\dfrac{1}{\bar{z}} = \dfrac{1}{a-ib} = \dfrac{a+ib}{a^2+b^2}$ en multipliant numérateur et dénominateur par $a + ib$.
  D'où l'égalité.
- $\overline{\dfrac{z'}{z}} = \overline{z'\dfrac{1}{z}} = \bar{z'}\overline{\dfrac{1}{z}} = \bar{z'}\dfrac{1}{\bar{z'}} = \dfrac{\bar{z'}}{\bar{z}}$.

4 Équations du second degré à coefficients réels et factorisation

Propriété :
Soit a un réel. On considère l'équation $z^2 = a$ dans $\mathbb{C}$.

- Si $a = 0$, l'équation admet 0 pour unique solution.
- Si $a > 0$, l'équation admet deux solutions réelles $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- Si $a < 0$, l'équation admet deux solutions imaginaires pures $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$.

Preuve :
Immédiate d'après la définition du nombre i.

Exemple :
L'équation $z^2 = -9$ admet pour solutions $-3i$ et $3i$.

Propriété :

On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b, c réels et $a \neq 0$ de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Alors :

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

  En outre, pour tout nombre complexe z, $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une unique solution réelle $z_0 = -\frac{b}{2a}$.
  En outre, pour tout nombre complexe z, $az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2$
- Si $\Delta < 0$, alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

  En outre, pour tout nombre complexe z, $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

Preuve (troisième cas, les deux autres ayant vus en première) :

Dans tous les cas,

$az^2 + bz + c = a(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}) = a((z - (-\frac{b}{2a}))^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}) = a((z - (-\frac{b}{2a}))^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2})$
est l'écriture canonique de $az^2 + bz + c$.

L'équation s'écrit donc $(z - (-\frac{b}{2a}))^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$ donc $(z - (-\frac{b}{2a}))^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$.

Si $\Delta < 0$ alors $-\Delta > 0$ donc $\sqrt{-\Delta}$ a un sens et $(i\sqrt{-\Delta})^2 = -(-\Delta) = \Delta$
donc $i\sqrt{-\Delta}$ a pour carré Δ.

Par conséquent, l'équation équivaut à $z - (-\frac{b}{2a}) = \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ou $z - (-\frac{b}{2a}) = -\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}$
donc $z = \frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $z = \frac{-b-i\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exemple :

On considère la fonction polynôme définie pour tous les nombres complexes z par $P(z) = z^2 - 2z + 5 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16$.

$\Delta < 0$ donc il y a deux solutions non réelles conjuguées :
$z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{2 - i\sqrt{16}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{2 + i\sqrt{16}}{2}$
Donc les racines sont $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = 1 + i$.

D'où $P(z) = a(z - z_1)(z - z_2) = (z - i)(z + i)$.

Définition :

Soit n un entier naturel et soient a_1, a_2, ..., a_n des nombres réels avec $a_n \neq 0$. On appelle *fonction polynôme de degré n* à coefficients réels ou polynôme de degré n la fonction P définie pour tout complexe z par

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 ... + a_n z^n = \sum_{k=0}^{k=n} a_k z^k$$

L'équation $P(z) = 0$ est appelée équation polynomiale de degré n.
On appelle *racine* du polynôme P toute solution de l'équation $P(z) = 0$.

Propriété :

Soit z et a deux nombres complexes. Pour tout entier naturel n non nul,

$$z^n - a^n = (z-a)(z^{n-1} + az^{n-2} + ... + a^{n-2}z + a^{n-1}) = (z-a)(\sum_{k=0}^{k=n-1} z^{n-1-k}a^k)$$

Preuve :

On développe et les termes se simplifient deux à deux sauf les deux termes extrêmes :
$(z-a)(z^{n-1} + az^{n-2} + ... + a^{n-2}z + a^{n-1})$
$= z^n + az^{n-1} + ... + a^{n-2}z^2 + a^{n-1}z - az^{n-1} - a^2z^{n-2} - ... - a^{n-1}z - a^n$
$= z^n - a^n$.

Exemple :

$z^3 - 8 = z^3 - 2^3 = (z-2)(z^2 + 2z + 2^2) = (z-2)(z^2 + 2z + 4)$

Propriétés :

- Soit P un polynôme de degré n supérieur ou égal à 1. Si a est une racine du polynôme P alors P se factorise par $z-a$ c'est à dire qu'il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-a)Q(z)$.
- Pour tout entier naturel n non nul, un polynôme de degré n admet au plus n racines.

Preuves :

Admises