# Nombres complexes, approche algébrique, terminale, mathématiques expertes

## 1 Notion de nombre complexe

On sait depuis les babyloniens résoudre les équations dites du second degré (c'est à dire de la forme $ax^2 + bx + c = 0$). Cependant, on est resté longtemps sans méthode générale de résolution des équations du troisième degré. Ce n'est qu'au XVI$^{e}$ siècle qu'un mathématicien italien Tartaglia découvrit une méthode générale de résolution de ces équations. Il eut pour cela recourt à l'utilisation de ce qui fut qualifié à l'époque d'artifice : une racine carrée de -1, c'est à dire un nombre $x$ imaginaire tel que $\sqrt{x} = -1$. Ce n'est que par la suite que ce nombre acquèrera sont statut de nombre, sera renommé $i$ et donnera naissance aux nombres complexes qui seront étudiés en tant que nombres et permettront le développement de pans entiers des Mathématiques.

**Définition :**

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ et appelé *ensemble des nombres complexes* tel que :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels ;
- l'addition et la multiplication des nombres complexes « prolongent » l'addition et la multiplication des nombres réels. (c'est à dire que l'addition ou la multiplication de deux nombres réels considérés comme nombres complexes est l'addition ou la multiplication usuelle sur les nombres réels) ;
- Il existe un unique nombre complexe noté $i$ tel que $i^2 = -1$.
- Tout nombre complexe $z$ s'écrit de manière unique $z = a + ib$ où $a$ et $b$ sont deux nombres réels.

L'écriture $z = a + ib$ est appelée *forme algébrique* du nombre complexe $z$.

Le nombre réel $a$ est appelé *partie réelle* du nombre complexe $z$ et noté $\mathcal{R}e(z)$.

Le nombre réel $b$ est appelé *partie imaginaire* du nombre complexe $z$ et noté $\mathcal{I}m(z)$.

Si $a = 0$, le nombre $z$ s'écrit $z = ib$ avec $b \in \mathbb{R}$. On dit alors que $z$ est un imaginaire pur.

**Exemples :**

Le réel 3 est aussi un nombre complexe, il s'écrit $3 = 3 + 0 \times i$. Le nombre $3 + 2i$ est un nombre complexe non réel. Sa partie imaginaire est 2 et sa partie réelle est 3..

**Remarque :**

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

# 2 Opérations sur les nombres complexes

**Définitions :**

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes avec $a$, $b$, $a'$ et $b'$ réels.

- On appelle *opposé* de $z$ et on note $-z$ le nombre $-z = -a - ib$.
- On définit *l'addition* des nombres complexes $z$ et $z'$ et on note $z+z'$ le nombre :

$$z + z' = a + a' + i(b + b')$$

- On définit la *soustraction* de $z$ par $z'$ par l'addition de l'opposé de $z'$ au nombre $z$, c'est à dire en posant $z - z' = z + (-z')$
- On définit la *multiplication* des nombres complexes $z$ et $z'$ et on note $zz'$ le nombre :

$$zz' = (a + ib)(a' + ib') = aa' - bb' + i(ab' + a'b)$$

- Tout nombre complexe non nul $z$ admet un *inverse*, c'est à dire un nombre $z'$ tel que $zz' = 1$, noté $z' = \frac{1}{z}$.
- Si $z' \neq 0$, on définit le *quotient* de $z$ par $z'$ noté $\frac{z}{z'}$ en posant $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$.
- On appelle *conjugué* de $z = a + ib$ le nombre noté $\bar{z}$ défini par $\bar{z} = a - ib$.

**Remarque :**

L'addition, la soustraction, la multiplication et le quotient dans les complexes prolongent l'addition, la soustraction, la multiplication et le quotient dans les réels car, si $z$ et $z'$ sont réels, c'est $z = a$ et $z' = a'$ avec $a$ et $a'$ réels, alors $z + z' = a + a'$ et $zz' = aa'$.

**Exemples :**

- $(3 + 2i) + (5 - 4i) =$....

  ....

- $(3 + 2i)(5 - 4i) =$...

  ...

  ...

**Propriétés :**

Pour tous les nombres complexes $z$ et $z'$,

- $(z+z')^2 =$...
- $(z-z')^2 =$...
- $(z-z')(z+z') =$....
- $zz' = 0$ si et seulement si $z = 0$ ou $z' = 0$.

## 3 Conjugué d'un nombre complexe

**Définition :**

Pour tout nombre complexe $z$ de forme algébrique $z = a + ib$ avec $a$ et $b$ réels, on appelle *conjugué de $z$* le nombre noté $\bar{z}$ et défini par ....................

**Exemple [Utilisation du conjugué pour obtenir la forme algébrique d'un quotient :**

$\dfrac{3+2i}{5-4i} =$...

...

...

...

**Propriétés :**

Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes.

- $z$ est ............... si et seulement $\bar{z} = z$ ;
- $z$ est ................ si et seulement si $\bar{z} = -z$ ;
- $\overline{z+z'} =$........
- $\overline{zz'} =$.............
- pour tout entier naturel $n$, $\overline{z^n} =$..........
- si $z \neq 0$, $\overline{\dfrac{1}{z}} =$.........
- si $z \neq 0$, $\overline{\dfrac{z'}{z}} =$............

**Preuves :**

...

# 4 Équations du second degré à coefficients réels et factorisation

**Propriété :**

Soit $a$ un réel. On considère l'équation $z^2 = a$ dans $\mathbb{C}$.

- Si $a = 0$, l'équation admet ....... .......... ........... ............
- Si $a > 0$, l'équation admet ............ ............. ............... ................ ................ .....................
- Si $a < 0$, l'équation admet ............ .............. ............. .................. .

**Preuve :**

Immédiate d'après la définition du nombre $i$.

**Exemple :**

L'équation $z^2 = -9$ admet pour solutions ............ ..... ................

**Propriété :**

On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec $a$, $b$, $c$ réels et $a \neq 0$ de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Alors :

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles :

  ...

  En outre, pour tout nombre complexe $z$, $az^2 + bz + c =$ ......
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une unique solution réelle ... En outre, pour tout nombre complexe $z$, $az^2 + bz + c =$ ....
- Si $\Delta < 0$, alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

  ...

  En outre, pour tout nombre complexe $z$, $az^2 + bz + c =$ .....

**Preuves :**

...

**Exemple :**

On considère la fonction polynôme définie pour tous les nombres complexes $z$ par $P(z) = z^2 - 2z + 5 = 0$. Résolvons $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$ et factorisons $P(z)$.

...

...

...

...

...

**Définition :**

Soit $n$ un entier naturel et soient $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ des nombres réels avec $a_n \neq 0$. On appelle *fonction polynôme de degré $n$* à coefficients réels ou polynôme de degré $n$ la fonction $P$ définie pour tout complexe $z$ par

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 ... + a_n z^n = \sum_{k=0}^{k=n} a_k z^k$$

L'équation $P(z) = 0$ est appelée équation polynomiale de degré $n$.

On appelle *racine* du polynôme $P$ toute solution de l'équation $P(z) = 0$.

**Propriété :**

Soit $z$ et $a$ deux nombres complexes. Pour tout entier naturel $n$ non nul,

$$z^n - a^n = ...$$

**Preuve :**

...

...

...

**Exemple :**

$z^3 - 8 = ...$

**Propriétés :**

- Soit $P$ un polynôme de degré $n$ supérieur ou égal à 1. Si $a$ est une racine du polynôme $P$ alors $P$ se factorise par $z-a$ c'est à dire qu'il existe un polynôme $Q$ de degré $n-1$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, ............................
- Pour tout entier naturel $n$ non nul, un polynôme de degré $n$ admet ............. ............... ..............

**Preuves :**

Admises