Suites numériques particulières

1 Suites arithmétiques

Définition :

Soit r un nombre réel. On appelle *suite arithmétique* de *raison* r toute suite définie par son premier terme et pour tout entier naturel n par la relation :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Propriété (expression en fonction de n) :

Si $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de raison r, alors :
- si le premier terme est u_0, alors pour tout entier n, $u_n = u_0 + nr$
- si le premier terme est u_1, alors pour tout entier n, $u_n = u_1 + (n-1)r$

De manière plus générale, pour tous les entiers naturels n et p avec $p < n$:

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

2 Suites géométriques

Définition :

Soit q un réel. On appelle suite *géométrique* de *raison* q toute suite définie par son premier terme u_0 (ou u_1) et telle que pour tout entier naturel $n \geq 0$ (ou $n \geq 1$) :

$$u_{n+1} = qu_n$$

Propriété (expression en fonction de n) :

Si $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme :
- u_0, alors $u_n = q^n u_0$
- u_1, alors $u_n = q^{n-1} u_1$

De manière plus générale, pour tous les entiers naturels n et p avec $p < n$:

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

3 Sommes de termes

3.1 Suites arithmétiques

Propriété :

Pour tout entier naturel n,

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Propriété :

Pour toute suite arithmétique $(u_n)_n$ et tout entier naturel n :

$$u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n=\frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$$

ou pour tout entier naturel $p<n$,

$$u_p+u_{p+1}+\ldots+u_n=(n-p+1)\frac{u_p+u_n}{2}$$

ce qui s'écrit encore :

$$u_p+u_{p+1}+...+u_n=\frac{\text{nombre de termes}\times(\text{premier terme}+\text{dernier terme})}{2}$$

3.2 Suites géométriques

Propriété :

Pour tout réel $q\neq 1$ on a :

$$1+q+q^2+...+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Propriété :

Si $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0, alors :

- si $q\neq 1$,

$$u_0+u_1+\ldots+u_n=\frac{u_0(1-q^{n+1})}{1-q}$$

ou

$$u_p+u_{p+1}+...+u_n=u_p\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

- si $q=1$, $u_0+u_1+\ldots+u_n=(n+1)u_0$.