Limites de suites, cours, terminale, mathématiques complémentaires

F.Gaudon

13 mai 2023

Table des matières

1 Convergence de suites

Définition :

Soit (u_n) une suite.
On dit que (u_n) *converge vers un réel* l ou *a pour limite* l lorsque tout intervalle ouvert A contenant l, contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang. On dit alors que la suite est convergente et que l est sa limite. On note $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ ou $lim_n u_n = l$.

Propriété :

Si (u_n) converge vers une limite l, alors celle-ci est unique.

2 Convergence de suites de référence

Propriété (limites finies de suites de référence) :

Les suites $(\frac{1}{n})$, $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ et $(\frac{1}{n^p})$ où p est un entier naturel non nul sont convergentes et on a :

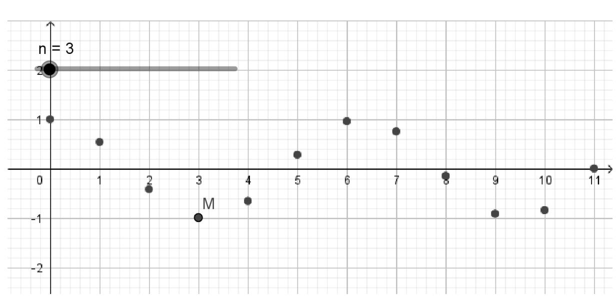
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0$

3 Divergence de suites

Définition :

- On dit qu'une suite est *divergente* si elle ne converge pas.
- On dit que la suite (u_n) *diverge vers* $+\infty$ ou *a pour limite* $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque tout intervalle de la forme $[a;+\infty[$ où a est un réel (resp. $]-\infty;a]$), contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (resp. $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$)

Remarque :
Une suite peut être divergente et ne pas admettre de limite, par exemple $(sin(n))$.



Propriété (limites infinies de suites de référence) :

On a :
- $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$;
- $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$;
- $\lim_{n\to+\infty} n^p = +\infty$ avec p entier naturel non nul ;
- Pour tous les réels m et p, $\lim_{n\to+\infty} mx + p = signe(m)\infty$;

4 Opérations sur les limites de suites

Propriété :

Soit (u_n) une suite.
- si k est un réel et si (u_n) converge vers un réel l, alors la suite (ku_n) est convergente vers kl ;
- si k est un réel et (u_n) diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) alors ku_n diverge vers $signe(k)\infty$ (resp $-signe(k)\infty$) ;

Propriété :

$\lim u_n$	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	l	l
$\lim v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim u_n + v_n$	$l + l'$	$+\infty$	indéterminée	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim u_n \times v_n$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	signe(l)∞, $l \neq 0$	-signe(l)∞, l
$\lim \frac{u_n}{v_n}$	si $l' \neq 0$, $\frac{l}{l'}$	indéterminée	indéterminée	indéterminée	0	0

Exemples [Savoir utiliser les opérations sur les limites] :
- Soit u_n définie par $u_n = 3n^4 + 2n - 5$ pour tout $n \geq 0$.
  Comme $lim_{n\to+\infty} 3n^4 = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} 2n - 5 = +\infty$,
  par somme, la suite (u_n) tend donc vers $+\infty$.
- Soit w_n définie par $w_n = -n^2(3n-1)$ pour tout entier naturel n.
  Comme $\lim n \to -infty - n^2 = +\infty$ et $\lim_{n\to-\infty} 3n - 1 = -\infty$,
  par produit, la suite (w_n) tend donc vers $-\infty$.
- Soit v_n définie par $v_n = 5n^2 - 6n$ pour tout $n \geq 0$. On a alors $v_n = n(5n-6)$. Or $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} 5n - 6 = +\infty$ donc (v_n) diverge vers $+\infty$.

5 Limite de suites géométriques

Propriété (limite des suites géométriques) :

Soit q un réel. Alors :
- Si $q > 1$, alors la suite (q^n) a pour limite $+\infty$;
- si $0 < q < 1$, alors la suite (q^n) a pour limite 0 ;

Propriété :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $0 < q < 1$ et de premier terme u_p. Alors la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n par $S_n = \sum_{k=p}^{k=n} u_k = u_p + u_1 + ... + u_n$ est convergente de limite $u_p \dfrac{1}{1-q}$.

Preuve :

On sait que la somme des termes d'une telle suite géométrique est donnée par : $S_n = u_p \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$.

Comme $\lim_n q^{n-p+1} = 0$ on a donc $\lim_n S_n = u_p \dfrac{1}{1-q}$.

6 Inégalités et limites de suites

Propriété, théorème de comparaison des limites :

- Soit (u_n) une suite divergente vers $+\infty$ et (v_n) une suite telle qu'à partir d'un certain rang $v_n \geq u_n$. Alors (v_n) est divergente vers $+\infty$.
- Soit (u_n) une suite divergente vers $-\infty$ et (v_n) une suite telle qu'à partir d'un certain rang $v_n \leq u_n$. Alors (v_n) diverge vers $-\infty$.

Théorème dit « théorème des gendarmes » :

Soient u, v et w des suites avec v et w convergentes vers une même limite l. Si, à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$, alors la suite u est convergente vers l.

Remarque :

Les deux théorèmes précédents sont souvent utilisés à partir des encadrements suivants valables pour tout entier naturel n :
- .... $\leq (-1)^n \leq$ ..... ;
- .... $\leq \cos(n) \leq$ .... ;
- .... $\leq \sin(n) \leq$ .....

Théorème :

Soit (u_n) une suite croissante et convergente vers un réel l. Alors tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs ou égaux à l.

7 Suites arithmético-géométriques

Définition :

On dit qu'une suite (u_n) est *arithmético-géométrique* s'il existe deux réels a et b tels que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}au_n + b$.

Propriété :

Soient a et b deux réels tels que $a \neq 1$. Soit (u_n) la suite arithmético-géométrique définie par $u_{n+1} = au_n + b$ pour tout entier naturel n. Si l est la solution de l'équation $ax + b = x$, alors la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - l$ est géométrique de raison a.

Exemple :
Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 0,5u_n + 2$.
L'équation $l = 0,5l + 2$ équivaut à $l - 0,5l = 2$ donc à $0,5l = 2$ donc à $l = 4$.
On pose $v_n = u_n - 4$ pour tout entier naturel n.
On a pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 4$
donc $v_{n+1} = 0,5u_n + 2 - 4 = 0,5u_n - 2 = 0,5(u_n - \frac{2}{0,5}) = 0,5(u_n - 4) = 0,5v_n$
donc (v_n) est géométrique de raison 0,5.

8 Algorithmique et programmation

Algorithmique :
Soit (u_n) suite (u_n) définie à partir d'un rang p par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq p$ et convergente vers une limite l. L'algorithme suivant donne le rang n du premier terme de la suite situé à une distance inférieure à un réel positif e de la limite l :

Données : p, u_p, l, e
Début traitement
    $u \leftarrow u_p$;
    $n \leftarrow p$;
    tant que $|u - l| \geq e$ **faire**
        $u \leftarrow f(u)$;
        $n \leftarrow n + 1$
    fin
    Afficher n
Fin

Exemple :
Soit (u_n) définie par $u_{n+1} = 0,5u_n + 1$ pour tout entier naturel n non nul et par $u_1 = 0,75$.
p désigne le premier rang de la suite (1 ici). On admettra que la suite (u_n) converge vers 2 ; on a donc $l = 2$ ici. e désigne la différence entre les termes et la limite qui doit être obtenue.

```
def seuil():
        u=0.75
        n=1
        while(abs(u-0)>e):
                u=0,5*u+1
                n=n+1
        return n
```

Algorithme de calcul d'un terme de rang donné :
Algorithme de calcul des termes successifs jusqu'au rang N d'une suite (u_n) définie à partir d'un rang p et définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq p$.

```
Données : p, N, u_p, f
Début traitement
    u ← u_p ;
    L ← [u] ;
    pour k allant de p+1 à N faire
        u ← f(u) ;
        Ajouter u à L ;
    fin
Fin
```

Exemple de programmation en langage python :
Soit (u_n) définie par $u_{n+1} = 3u_n + 2$ pour tout entier naturel n non nul et par $u_1 = 2$ n. p désigne le premier rang de la suite (1 ici), N désigne le dernier rang dont on cherche à calculer le terme et u désigne les différents termes de la suite.

```
def calculTerme(u,p,n):
        u=2
        L=[u]
        for k in range(p,n):
                u=3*u+2
                L.append(u)
        return L
```