Limites de suites, cours, terminale, mathématiques complémentaires

1 Convergence de suites

Définition :

Soit (u_n) une suite.
On dit que (u_n) *converge vers un réel* l ou *a pour limite* l lorsque tout intervalle ouvert A contenant l, contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang. On dit alors que la suite est convergente et que l est sa limite. On note ....

Propriété :

Si (u_n) converge vers une limite l, alors celle-ci est ....

2 Convergence de suites de référence

Propriété (limites finies de suites de référence) :

Les suites $(\frac{1}{n})$, $\frac{1}{\sqrt{n}})$ et $\frac{1}{n^p}$ où p est un entier naturel non nul sont convergentes et on a :

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} =$ .....
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} =$ ......
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} =$ ......

3 Divergence de suites

Définition :

- On dit qu'une suite est *divergente* si ....
- On dit que la suite (u_n) *diverge vers* $+\infty$ ou *a pour limite* $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque tout intervalle de la forme $[a;+\infty[$ où a est un réel (resp. $]-\infty;a]$), contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note $\lim_{n\to+\infty} u_n =$ .... (resp. $\lim_{n\to+\infty} u_n =$ ....)

Remarque :
Une suite peut être divergente et ne pas admettre de limite, par exemple ....

Propriété (limites infinies de suites de référence) :

On a :
- $\lim_{n\to+\infty} n =$ .... ;
- $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} =$ .... ;
- $\lim_{n\to+\infty} n^p =$ .... avec p entier naturel non nul ;
- Pour tous les réels m et p, $\lim_{n\to+\infty} mx + p =$ .... ;

4 Opérations sur les limites de suites

Propriété :

Soit (u_n) une suite.
- si k est un réel et si (u_n) converge vers un réel l, alors la suite (ku_n) est convergente vers .... ;
- si k est un réel et (u_n) diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) alors ku_n diverge vers .... (resp ....) ;

Propriété :

$\lim u_n$	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	l	l
$\lim v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim u_n + v_n$	....	....	....	....	....	....
$\lim u_n \times v_n$	....	....	....	....	....	....
$\lim \frac{u_n}{v_n}$	si $l' \neq 0$, ...	....	....	....	.....	......

Exemples [Savoir utiliser les opérations sur les limites] :

- Soit u_n définie par $u_n = 3n^4 + 2n - 5$ pour tout $n \geq 0$.
  Comme $lim_{n\to+\infty} 3n^4 =$ .... et $\lim_{n\to+\infty} 2n - 5 =$ ....,
  par somme, la suite (u_n) .... donc vers ....
- Soit w_n définie par $w_n = -n^2(3n-1)$ pour tout entier naturel n.
  Comme $\lim n \to -infty - n^2 =$ .... et $\lim_{n\to-\infty} 3n - 1 =$ ....,
  par produit, la suite (w_n) .... donc vers ....
- Soit v_n définie par $v_n = 5n^2 - 6n$ pour tout $n \geq 0$. On a alors $v_n = n(5n-6)$. Or $\lim_{n\to+\infty} n =$ .... et $\lim_{n\to+\infty} 5n - 6 =$ .... donc (v_n) .... vers ....

5 Limite de suites géométriques

Propriété (limite des suites géométriques) :

Soit q un réel. Alors :
- Si ...., alors la suite (q^n) a pour limite .... ;
- si ...., alors la suite (q^n) a pour limite .... ;
- si ...., alors la suite (q^n) ....

Propriété :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $0 < q < 1$ et de premier terme u_p. Alors la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n par $S_n = \sum_{k=p}^{k=n} u_k = u_p + u_1 + ... + u_n$ est convergente de limite $u_p \dfrac{1}{1-q}$.

Preuve :

On sait que la somme des termes d'une telle suite géométrique est donnée par : $S_n = u_p \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$.

Comme $\lim_n q^{n-p+1} = 0$ on a donc $\lim_n S_n = u_p \dfrac{1}{1-q}$.

6 Inégalités et limites de suites

Propriété (théorème de ....) :

- Soit (u_n) une suite divergente vers $+\infty$ et (v_n) une suite telle qu'à partir d'un certain rang $v_n \geq u_n$. Alors (v_n) est .... vers ....
- Soit (u_n) une suite divergente vers $-\infty$ et (v_n) une suite telle qu'à partir d'un certain rang $v_n \leq u_n$. Alors (v_n) .... vers ....

Théorème (dit « théorème des gendarmes ») :

Soient u, v et w des suites avec v et w convergentes vers une même limite l. Si, à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$, alors la suite u est ....

Remarque :

Les deux théorèmes précédents sont souvent utilisés à partir des encadrements suivants valables pour tout entier naturel n :
- .... $\leq (-1)^n \leq$ ..... ;
- .... $\leq \cos(n) \leq$ .... ;
- .... $\leq \sin(n) \leq$ .....

7 Suites arithmético-géométriques

Définition :

On dit qu'une suite (u_n) est *arithmético-géométrique* s'il existe deux réels a et b tels que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, ...

Propriété :

Soient a et b deux réels tels que $a \neq 1$. Soit (u_n) la suite arithmético-géométrique définie par $u_{n+1} = au_n + b$ pour tout entier naturel n. Si l est la solution de l'équation ...., alors la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - l$ est .... de raison ....

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 0,5u_n + 2$.

L'équation .... équivaut à ....

On pose $v_n = u_n -$ .... pour tout entier naturel n.

On a pour tout entier naturel n, $v_{n+1} =$ ....

donc $v_{n+1} =$ ....

donc (v_n) est géométrique de raison ....

8 Algorithmique

Algorithmique :
Soit (u_n) suite (u_n) définie à partir d'un rang p par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq p$ et convergente vers une limite l. L'algorithme suivant donne le rang n du premier terme de la suite situé à une distance inférieure à un réel positif e de la limite l :

```
Données : p, u_p, l, e
Début traitement
    u ← ... ;
    n ← ... ;
    tant que |u − l| ≥ e faire
        u ← f(...) ;
        n ← ...
    fin
    Afficher ...
Fin
```

Exemple :
Soit (u_n) définie par $u_{n+1} = 0,5u_n + 1$ pour tout entier naturel n non nul et par $u_1 = 0,75$. p désigne le premier rang de la suite (1 ici). On admettra que la suite (u_n) converge vers 2 ; on a donc $l = 2$ ici. e désigne la différence entre les termes et la limite qui doit être obtenue.

```python
def seuil():
        u=...
        n=...
        while(abs(u-2)  ...  e):
                u=...
                n=...
        return n
```

Algorithme de calcul d'un terme de rang donné :
Algorithme de calcul des termes successifs jusqu'au rang N d'une suite (u_n) définie à partir d'un rang p et définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq p$.

```
Données : p, N, u_p, f
Début traitement
    u ← ... ;
    L ← [...] ;
    pour k allant de p + 1 à N faire
        u ← f(...) ;
        Ajouter ... à L ;
    fin
Fin
```

Exemple de programmation en langage python :
Soit (u_n) définie par $u_{n+1} = 3u_n + 2$ pour tout entier naturel n non nul et par $u_1 = 2$ n. p désigne le premier rang de la suite (1 ici), N désigne le dernier rang dont on cherche à calculer le terme et u désigne les différents termes de la suite.

```
def calculTerme(u,p,n):
        u=2
        L=[...]
        for k in range(p,n):
                u=...
                L.append(...)
        return ...
```