Probabilités, cours, terminale, mathématiques complémentaires

F.Gaudon

13 mai 2023

Table des matières

1 Loi uniforme

Propriété et définition :
Soit $E = \{1; 2; ...; n\}$ où n est un entier naturel non nul. On dit qu'une variable aléatoire X suit la *loi uniforme* de paramètre n si pour tout $k \in \{1; 2; ...; n\}$,

$$P(X = k) = \frac{1}{n}$$

Preuve :
Il faut montrer que l'on obtient bien une loi de probabilité en posant $P(X = k) = \frac{1}{n}$.
On a $P(X = k) \geq 0$ donc les probabilités des différentes issues sont positives.
$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + ...\frac{1}{n} = n \times \frac{1}{n} = 1$.
Donc la somme des probabilités vaut 1 et on définit donc bien une loi de probabilité.

Remarque :
La loi uniforme apparaît lorsque l'on modélise une expérience aléatoire à l'aide d'une loi *équirépartie*, c'est à dire lorsque l'on a affaire à une situation *d'équiprobabilité*.

Propriétés :
- Soit A un événement de E. Alors $P(X \in A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{n}$.
- L'espérance est $E(X) = \frac{n+1}{2}$. L'espérance donne le nombre moyen de réalisations sur un grand nombre de simulations.

Preuve :
Le premier point est immédiat. Preuve de l'espérance :
$E(X) = \sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{n} = \frac{1}{n}(\sum_{k=0}^{n} k) = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$
ou écrit autrement :
$E(X) = 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) + \cdots + n \times P(X = n)$
$= 1 \times \frac{1}{n} + 2 \times \frac{1}{n} + \cdots + n \times \frac{1}{n}$
$= \frac{1}{n}(1 + 2 + \cdots + n) = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$.

2 Loi de Bernoulli

Définition :

Soit p un nombre réel tel que $p \in [0;1]$. Soit X une variable aléatoire. On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si :

- X prend pour seules valeurs 1 (« succès ») et 0 (« échec ») ;
- $P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$.

Propriétés :

Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p :

- L'espérance est $E(X) = p$;
- la variance est $V(X) = p(1-p)$.

Preuve :

- $E(X) = 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1) = 1 \times p = p$
- $V(X) = P(X=0) \times (0-E(X))^2 + P(X=1) \times (1-E(X))^2$
  $= (1-p) \times (0-p)^2 + p \times (1-p)^2 = p^2(1-p) + p(1-p)^2 = p(1-p)(p+1-p) = p(1-p)$

Algorithmique et programmation en langage python :

Algorithme de simulation d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p.

```
Données : p : nombre décimal entre 0 et 1 ;
Début traitement
    t prend une valeur aléatoire décimale entre 0 inclus et 1 exclu ;
    si t < p alors
        Renvoyer "Succès" ;
    fin
    sinon
        Renvoyer "Échec" ;
    fin
Fin
```

```python
import random
def bernoulli(p):
        t=random.random()
        if t<p:
                return 1
        else:
                return 0
```

3 Schéma de Bernoulli

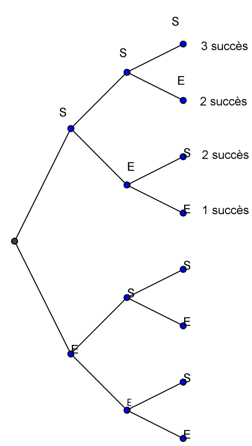
Définition :
Deux expériences sont dites indépendantes si le résultat de l'une n'influe pas sur le résultat de l'autre.

Exemple :
il y a indépendance lorsqu'on lance deux fois de suite une pièce de monnaie.

Définition :
On considère une expérience aléatoire ne comportant que deux issues ; l'une appelée « succès » et l'autre appelée « échec ». On note p la probabilité de succès et q la probabilité d'échec ($q = 1 - p$). La répétition de cette expérience n fois de manière indépendante constitue *un schéma de Bernoulli* de paramètres n et p.

Propriété :
Dans un schéma de Bernoulli, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat

Exemple :



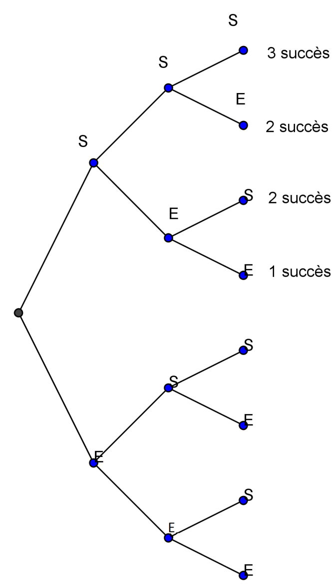
On contrôle la qualité d'un produit sur une chaîne de production. On prélève 3 produits au hasard. On suppose que les prélèvements sont indépendants. Statistiquement, chaque produit a une probabilité $p = 0,05$ d'être défectueux.
Sur l'arbre ci-dessus représentant un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$, la probabilité d'avoir les deux premières expériences qui donnent un succès et la dernière qui donne un échec est $P(SS\bar{S}) = 0,05^2 \times 0,95 \approx 0,002$
soit 0,2 % de chances d'avoir deux produits défectueux sur les trois prélevés.

4 Loi binomiale

Définition : :
Soient n et k deux entiers naturels avec $k \leq n$. On note $\binom{n}{k}$ (on dit « k parmi n ») le nombre de manières d'obtenir k succès et $n-k$ échecs pour n répétitions indépendantes de la même expérience de Bernoulli.

Remarque hors programme mais culturelle :
On a
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
avec $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1$.

Exemple :



$\binom{3}{3} = 1$: il y a une seule manière d'obtenir 3 succès lors de la répétition de 3 épreuves identiques indépendantes.
$\binom{3}{2} = 3$: il y a trois manières d'obtenir 2 succès et un échec lors de la répétition de 3 épreuves identiques indépendantes (SSE ; SES ; ESS).

Définition :
On considère une épreuve de Bernoulli de paramètre $p \in [0;1]$. On répète n fois ($n \geq 1$) cette expérience indépendamment et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès. On dit alors que la variable aléatoire X suit une loi *binomiale* de paramètres n et p et on note $X \sim \mathcal{B}(n;p)$.

Propriété :
Si X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors la probabilité d'obtenir k succès avec $k \in \{0; 1; 2; ...; n\}$ est $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Preuve :
Il y a $\binom{n}{k}$ manières d'obtenir k succès dans n répétitions d'expériences identiques et indépendantes. La probabilité de chacune de ces événements qui sont évidemment incompatibles est $p^k(1-p)^{n-k}$ d'où le résultat.

Exemple :
On considère le problème précédent de test des produits d'une chaîne de production. Les prélèvements étant supposés indépendants les uns des autres, l'expérience constitue un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$. La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$.
On a $P(X = 2) = P(SS\bar{S} \cap S\bar{S}S \cap \bar{S}SS)$
car trois chemins permettent d'obtenir deux succès c'est à dire deux objets défectueux.
D'où $P(X = 2) = P(SS\bar{S}) + P(S\bar{S}S) + P(\bar{S}SS)$
donc $P(X = 2) = 0,05^2 \times 0,95 + 0,05 \times 0,95 \times 0,05 + 0,95 \times 0,05^2 = 3 \times 0,05^2 \times 0,95 = 0,007$
soit une probabilité très faible de 0,007 d'avoir deux produits défectueux.

Calcul pratique de $P(X = k)$ et $P(X \leq k)$:
Soit X une variable aléatoire de paramètres n et p. Pour k allant de 0 à n, pour calculer $P(X = k)$ ou $P(X \leq k)$, on utilise une calculatrice :

- Sur Texas instrument : aller dans le menu $\boxed{\text{2nd}}\boxed{\text{distrib}}$, choisir $\boxed{\text{binomFdp}}$ et taper $\boxed{\text{n}}\boxed{,}\boxed{\text{p}}\boxed{,}\boxed{\text{k}}\boxed{)}$ pour calculer $P(X = k)$ et choisir $\boxed{\text{binomFRép}}$ et taper $\boxed{\text{n}}\boxed{,}\boxed{\text{p}}\boxed{,}\boxed{\text{k}}\boxed{)}$ pour calculer $P(X \leq k)$.
- Sur Casio : aller dans le menu $\boxed{\text{STAT}}$ puis $\boxed{\text{DIST}}$ puis $\boxed{\text{BINM}}$. Sélectionner alors $\boxed{\text{Bpd}}$ puis $\boxed{\text{Var}}$ pour variable, puis entrer alors k dans la ligne « x », n dans la ligne « numtrial » et p dans la ligne « p » puis aller sur « execute » pour valider et calculer ainsi $P(X = k)$. Pour le calcul de $P(X \leq k)$, on utilisera $\boxed{\text{Bcd}}$ au lieu de $\boxed{\text{Bpd}}$.

Exemple :
On considère une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,4$.
Sur TI, la probabilité $P(X \leq 3)$ est donnée par `binomFrép(4,0.4,3)`.

Remarques :

- On a $P(X < k) = P(X \leq k - 1)$.

- Pour calculer $P(X > k)$, on calcule $1 - P(X \leq k)$.
- Pour calculer $P(a \leq X \leq b)$, on calcule $P(X \leq b) - P(X < a)$.

Propriétés :
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p :
- $E(X) = np$ c'est à dire que le nombre moyen de succès obtenu sur un grand nombre de simulations se rapproche de np ;
- $V(X) = np(1-p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$, c'est à dire que la dispersion observée en moyenne par rapport à la moyenne sur un grand nombre de simulations, se rapproche de $\sqrt{np(1-p)}$.

Preuves : Admises

Exemple :
Pour le problème de la chaîne de production, en prélevant $n = 100$ produits indépendamment, la loi binomiale a pour paramètres $n = 100$ et $p = 0,05$. On a alors $E(X) = np = 100 \times 0,05 = 5$ ce qui signifie que l'on peut prévoir 5 produits défectueux pour un prélèvement de 100 produits indépendants.

Algorithmique :
Algorithme de simulation d'une loi binomiale de paramètres n et p.

Données : p : nombre décimal entre 0 et 1 ; n : entier naturel ;
Début traitement
  $c \leftarrow 0$;
  pour *k de 1 jusque n* **faire**
    t prend une valeur aléatoire décimale entre 0 inclus et 1 exclu ;
    si $t < p$ **alors**
      $c \leftarrow c + 1$;
    fin
  fin
Fin

Exemple de programmation en langage python :

```
import random
def simulBinomiale(n,p):
        c=0
        for k in range(1,n+1):
                t=random.random()
                if t<p:
                c=c+1
```

```
        return c
```

5 Coefficients binomiaux

Définition :

On appelle *coefficients binomiaux* l'ensemble des nombres $\binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$.

Utilisation de la calculatrice :

Casio : Touche $\boxed{\text{nCr}}$. Taper sur $\boxed{\text{OPTN}}$ puis $\boxed{\text{PROB}}$ puis $\boxed{\text{nCr}}$.

Syntaxe : 7$\boxed{\text{nCr}}$4

TI : Touche $\boxed{\text{Combinaison}}$. Taper sur $\boxed{\text{math}}$ puis aller dans le menu $\boxed{\text{PROB}}$ puis choisir $\boxed{\text{Combinaison}}$.

Syntaxe : 7$\boxed{\text{Combinaison}}$4

Numworks : menu boîte à outils puis $\boxed{\text{Dénombrement}}$ puis $\boxed{\text{binomial(n,k)}}$ (Attention : nom mal choisi, cela n'a rien à voir avec une loi binomiale).

Propriétés :

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Triangle de Pascal :

Le triangle de Pascal, du nom de Blaise Pascal, mathématicien français du XVII^{e} siècle qui l'a « redécouvert » en Occident (car il était connu avant en Orient et au Moyen-Orient) est une disposition permettant de visualiser et de calculer les coefficients binomiaux et qui s'appuie sur la formule précédente.

$\binom{0}{0} = 1$					
$\binom{1}{0} = 1$	$\binom{1}{1} = 1$				
$\binom{2}{0} = 1$	$\binom{2}{1} = 2$	1			
$\binom{3}{0} = 1$	$\binom{3}{1} = 3$	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Explication de la construction : le nombre de la ligne n et de la colonne k est le coefficient binomial $\binom{n-1}{k-1}$. Il est obtenu en ajoutant le nombre situé au dessus (ligne $n-1$ et colonne k) au nombre de la colonne et de la ligne précédente (ligne $n-1$ et colonne $k-1$).

Par exemple, $\binom{3}{1} = 3$ est la somme de $\binom{2}{1} = 2$ et de $\binom{2}{0} = 1$.

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Exemple de programmation du triangle de Pascal en langage python :

```
def trianglePascal(n):
        L=[1]
        L=L+[0 for k in range(n)]
        t=[L]
        for k in range(1,n+1):
                L=[1]
                for l in range(1,k+1):
                        L.append(t[k-1][l]+t[k-1][l-1])
                L=L+[0 for l in range(k,n)]
                t=t+[L]
        return t
```

6 Loi géométrique

Définition :

Soit $E = \mathbb{N}^*$. Soit $p \in [0;1]$. On dit qu'une variable aléatoire X définie sur E suit une loi géométrique de paramètre p lorsqu'elle donne le nombre d'expériences de Bernoulli de paramètre p répétées indépendamment nécessaires pour obtenir un premier succès. On note alors $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Propriétés :

Si X suit une loi géométrique de paramètre p alors :

- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$$
- $E(X) = \frac{1}{p}$, c'est à dire, que le nombre moyen d'essais pour obtenir un premier succès se rapproche de $\frac{1}{p}$ sur un grand nombre de simulations.

Propriété :

X suit une loi géométrique si et seulement si pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$, $P_{X>m}(X > m+n) = P(X > n)$.

Cette propriété illustre que la loi géométrique est une loi dite « sans mémoire ». Cette propriété montre aussi que les seules lois discrètes sans mémoire sont les lois géométriques.

Preuve de la condition nécessaire :
$P_{X>m}(X > m + n) = \frac{P(X>m+n \cap X>m)}{P(X>m)} = \frac{P(X>m+n)}{P(X>m)}$ car $X > m$ est nécessairement réalisé si $X > m + n$.
Remarquons ensuite que :
$P(X > m) = 1 - P(X \leq m) = 1 - \sum_{k=1}^{m} p(1-p)^{k-1} = 1 - p\sum_{k=0}^{m-1}(1-p)^k = 1 - p\frac{1-(1-p)^m}{1-(1-p)} = 1 - p\frac{1-(1-p)^m}{p} = 1 - (1 - (1 - p)^m) = (1 - p)^m$
ce qui se justifie aussi par le fait qu'avoir besoin de plus de m répétitions pour obtenir le premier succès est équivalent à dire que les m premières répétitions ont été des échecs.
D'où $P_{X>m}(X > m + n) = \frac{P(X>m+n)}{P(X>m)} = \frac{(1-p)^{m+n}}{(1-p)^m} = (1 - p)^n$.
Or $P(X > n) = (1 - p)^n$ d'où l'égalité.

Remarque :
On a pour tout k appartenant à $\mathbb{N}^*$, $P(X > k) = q^k$
car « avoir besoin de plus de k tentatives pour obtenir le premier succès » équivaut à « obtenir des échecs aux k premières tentatives ».