Probabilités, cours, classe de terminale, Mathématiques complémentaires

1 Loi uniforme

Propriété et définition :

Soit $E = \{1; 2; ...; n\}$ où n est un entier naturel non nul. On dit qu'une variable aléatoire X suit la *loi uniforme* de paramètre n si pour tout $k \in \{1; 2; ...; n\}$,

....

Preuve :

Il faut montrer que l'on obtient bien une loi de probabilité en posant $P(X = k) =$.............
.
On a $P(X = k) \geq$ ....
et $\sum_{k=0} nP(X = k) =$.....
Donc on définit bien une loi de probabilité.

Remarque :

La loi uniforme apparaît lorsque l'on modélise une expérience aléatoire à l'aide d'une loi ...., c'est à dire lorsque l'on a affaire à une situation ....

Propriétés :

- Soit A un événement de E. Alors $P(X \in A) =$..............
- L'espérance est $E(X) =$.........

Preuve :

Le premier point est immédiat. Preuve de l'espérance :
$E(X) =$.....
....
....

2 Loi de Bernoulli

Définition :

Soit p un nombre réel tel que $p \in [0;1]$. Soit X une variable aléatoire. On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si :

- X prend pour valeurs .... (« .... ») et .... (« .... ») ;
- $P(X=1)=$...... et $P(X=0)=$..........

Propriétés :

Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p :

- L'espérance est $E(X)=$...... ;
- la variance est $V(X)=$............

Preuve :

- $E(X)=$......
- $V(X)=$......

Algorithmique et programmation en langage python :

Algorithme de simulation d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p.

```
Données : p : nombre décimal entre 0 et 1 ;
Début traitement
    t prend une valeur aléatoire décimale entre 0 inclus et 1 exclu ;
    si t < p alors
        Renvoyer "Succès" ;
    fin
    sinon
        Renvoyer "Échec" ;
    fin
Fin
```

```python
import random
def bernoulli(p):
        t =............
        if ......:
                return ...
        else:
                return ...
```


BY NC SA

3 Schéma de Bernoulli

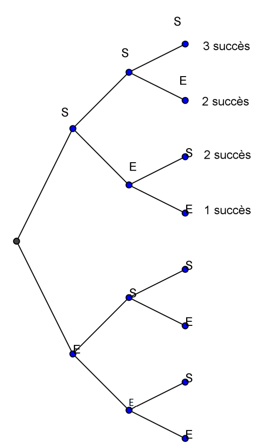
Définition :
Deux expériences sont dites .... si le résultat de l'une n'influe pas sur le résultat de l'autre.

Exemple :
il y a .... lorsqu'on lance deux fois de suite une pièce de monnaie.

Définition :
On considère une expérience aléatoire ne comportant que deux issues ; l'une appelée « succès » et l'autre appelée « échec ». On note p la probabilité de succès et q la probabilité d'échec ($q = 1 - p$). La répétition de cette expérience n fois de manière indépendante constitue *un schéma de Bernoulli* de paramètres n et p.

Propriété :
Dans un schéma de Bernoulli, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat

Exemple :

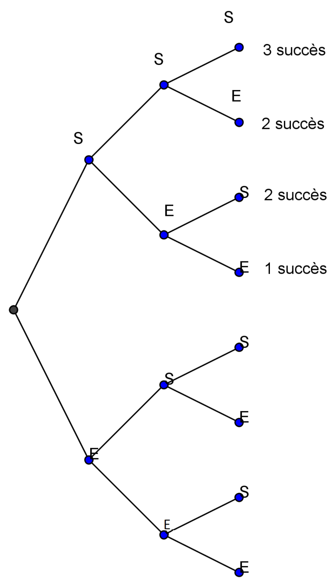


On contrôle la qualité d'un produit sur une chaîne de production. On prélève 3 produits au hasard. On suppose que les prélèvements sont indépendants. Statistiquement, chaque produit a une probabilité $p = 0,05$ d'être défectueux.
Sur l'arbre ci-dessus représentant un schéma de Bernoulli de paramètres $n =$.... et $p =$......, la probabilité d'avoir les deux premières expériences qui donnent un succès et la dernière qui donne un échec est $P(SS\bar{S}) =$.................
soit .... de chances d'avoir deux produits défectueux sur les trois prélevés.

4 Loi binomiale

Définition : :
Soient n et k deux entiers naturels avec $k \leq n$. On note $\binom{n}{k}$ (on dit « k parmi n ») le nombre de manières d'obtenir .... pour n répétitions indépendantes de la même expérience de Bernoulli.

Exemple :



$\binom{3}{3}$ =..... : il y a .... d'obtenir 3 succès lors de la répétition de 3 épreuves identiques indépendantes.
$\binom{3}{2} = 3$: il y a .... manières d'obtenir 2 succès et un échec lors de la répétition de 3 épreuves identiques indépendantes : ....

Définition :
On considère une épreuve de Bernoulli de paramètre $p \in [0; 1]$. On répète n fois $(n \geq 1)$ cette expérience indépendamment et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès. On dit alors que la variable aléatoire X suit une loi *binomiale* de paramètres n et p et on note $X \sim \mathcal{B}(n; p)$.

Propriété :
Si X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors la probabilité d'obtenir k succès avec $k \in \{0; 1; 2; ...; n\}$ est

....

Preuve :
Il y a $\binom{n}{k}$ manières d'obtenir k succès dans n répétitions d'expériences identiques et indépendantes. La probabilité de chacune de ces événements qui sont évidemment incompatibles est $p^k(1-p)^{n-k}$ d'où le résultat.

Exemple :
On considère le problème précédent de test des produits d'une chaîne de production. Les prélèvements étant supposés indépendants les uns des autres, l'expérience constitue un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$. La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$.
On a $P(X = 2) =$..........
car trois chemins permettent d'obtenir deux succès c'est à dire deux objets défectueux.
D'où $P(X = 2) =$..........
donc $P(X = 2) =$...........
soit une probabilité très faible de .... d'avoir deux produits défectueux.

Calcul pratique de $P(X = k)$ et $P(X \leq k)$:
Soit X une variable aléatoire de paramètres n et p. Pour k allant de 0 à n, pour calculer $P(X = k)$ ou $P(X \leq k)$, on utilise une calculatrice :

- Sur Texas instrument : aller dans le menu $\boxed{\text{2nd}}\boxed{\text{distrib}}$, choisir $\boxed{\text{binomFdp}}$ et taper $\boxed{\text{n}}\boxed{,}\boxed{\text{p}}\boxed{,}\boxed{\text{k}}\boxed{)}$ pour calculer $P(X = k)$ et choisir $\boxed{\text{binomFRép}}$ et taper $\boxed{\text{n}}\boxed{,}\boxed{\text{p}}\boxed{,}\boxed{\text{k}}\boxed{)}$ pour calculer $P(X \leq k)$.
- Sur Casio : aller dans le menu $\boxed{\text{STAT}}$ puis $\boxed{\text{DIST}}$ puis $\boxed{\text{BINM}}$. Sélectionner alors $\boxed{\text{Bpd}}$ puis $\boxed{\text{Var}}$ pour variable, puis entrer alors k dans la ligne « x », n dans la ligne « numtrial » et p dans la ligne « p » puis aller sur « execute » pour valider et calculer ainsi $P(X = k)$. Pour le calcul de $P(X \leq k)$, on utilisera $\boxed{\text{Bcd}}$ au lieu de $\boxed{\text{Bpd}}$.

Exemple :
On considère une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,4$.
Sur TI, la probabilité $P(X \leq 3)$ est donnée par `binomFrép(4,0.4,3)`.

Remarques :

- On a $P(X < 3) = P(X........2)$.
- Pour calculer $P(X > 3)$, on calcule ....
- Pour calculer $P(a \leq X \leq b)$ on calcule ....

Propriétés :
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p :

- $E(X) =$......... ;
- $V(X) =$.................... et $\sigma(X) =$................. .

Exemple :
Pour le problème de la chaîne de production, en prélevant $n = 100$ produits indépendamment, la loi binomiale a pour paramètres $n = 100$ et $p = 0,05$. On a alors $E(X) =$........................ ce qui signifie que l'on peut prévoir .... produits défectueux pour un prélèvement de 100 produits indépendants.

Algorithmique :
Algorithme de simulation d'une loi binomiale de paramètres n et p.

```
Données : p : nombre décimal entre 0 et 1 ; n : entier naturel ;
Début traitement
  | c ← 0 ;
  | pour k de 1 jusque n faire
  |   | t prend une valeur aléatoire décimale entre 0 inclus et 1 exclu ;
  |   | si t < p alors
  |   |   | c ← c + 1 ;
  |   | fin
  | fin
Fin
```

Exemple de programmation en langage python :

```python
import random
def simulBinomiale(n,p):
        c=....
        for k in range(1,n+1):
                t=........
                if ......:
                c=.......
        return .....
```

5 Coefficients binomiaux

Définition :
On appelle *coefficients binomiaux* l'ensemble des nombres $\binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$.

Utilisation de la calculatrice :

Casio : Touche nCr. Taper sur OPTN puis PROB puis nCr.

Syntaxe : 7 nCr 4

TI : Touche Combinaison. Taper sur math puis aller dans le menu PROB puis choisir Combinaison.

Syntaxe : 7 Combinaison 4

Numworks : menu boîte à outils puis Dénombrement puis binomial(n,k) (Attention : nom mal choisi, cela n'a rien à voir avec une loi binomiale).

Propriétés :
- $\binom{n}{k}$ =.............. ;
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ =............... .

Triangle de Pascal :

Le triangle de Pascal, du nom de Blaise Pascal, mathématicien français du XVII^e siècle qui le« redécouvra » en Occident (car il était connu avant en Orient et au Moyen-Orient) est une disposition permettant de visualiser et de calculer les coefficients binomiaux et qui s'appuie sur la formule précédente.

$\binom{0}{0} = 1$					
$\binom{1}{0} = 1$	$\binom{1}{1} = 1$				
$\binom{2}{0} = 1$	$\binom{2}{1} = 2$	....			
$\binom{3}{0} = 1$	$\binom{3}{1} = 3$	....	....		
1	....	....	....	1	
1	....	....	....	....	1

Explication de la construction : le nombre de la ligne n et de la colonne k est le coefficient binomial $\binom{n-1}{k-1}$. Il est obtenu en ajoutant le nombre situé au dessus (ligne $n-1$ et colonne k) au nombre de la colonne et de la ligne précédente (ligne $n-1$ et colonne $k-1$).
Par exemple, $\binom{3}{1} = 3$ est la somme de $\binom{2}{1} = 2$ et de $\binom{2}{0} = 1$.

1					
1	1				
1	....	1			
1	....	....	1		
1	....	....	....	1	
1	....	....	....	....	1

Exemple de programmation du triangle de Pascal en langage python :

```
def trianglePascal(n):
        L=[1]
        L=L+[0 for k in range(n)]
        t=[L]
        for k in range(1,n+1):
                L=[1]
                for l in range(1,k+1):
                        L.append(t[k-1][l]+t[k-1][l-1])
                L=L+[0 for l in range(k,n)]
                t=t+[L]
        return t
```

6 Loi géométrique

Définition :

Soit $E = \mathbb{N}^*$. Soit $p \in [0;1]$. On dit qu'une variable aléatoire X définie sur E suit une loi géométrique de paramètre p lorsqu'elle donne le nombre d'expériences de Bernoulli de paramètre p répétées indépendamment nécessaires pour obtenir un premier succès. On note alors $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Propriétés :

Si X suit une loi géométrique de paramètre p alors :

- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X = k) = ...$$

- $E(X) =$........ .

Propriété :

X suit une loi géométrique si et seulement si pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$, $P_{X>m}(X > m + n) =$................ .

Cette propriété illustre que la loi géométrique est une loi dite « sans mémoire ». Cette propriété montre aussi que les seules lois discrètes sans mémoire sont les lois géométriques.

CC BY NC SA

Preuve de la condition nécessaire :
$P_{X>m}(X > m+n) = \frac{P(X>m+n \cap X>m)}{X>m} = \frac{P(X>m+n)}{X>m}$ car $X > m$ est nécessairement réalisé si $X > m+n$.
Remarquons ensuite que $P(X > m) = 1 - P(X \leq m) = 1 - \sum_{k=1}^{m} p(1-p)^{k-1} = 1 - p\sum_{k=0}^{m-1}(1-p)^k = 1 - p\frac{1-(1-p)^m}{1-(1-p)} = 1 - p\frac{1-(1-p)^m}{p} = 1 - (1-(1-p)^m) = (1-p)^m$
D'où $P_{X>m}(X > m+n) = \frac{P(X>m+n)}{X>m} = \frac{(1-p)^{m+n}}{(1-p)^m} = (1-p)^n$.
Or $P(X > n) = (1-p)^n$ d'où l'égalité.

Remarque :
On a pour tout k appartenant à $\mathbb{N}^*$, $P(X > k) = ...$
car « avoir besoin de plus de k tentatives pour obtenir le premier succès » équivaut à « obtenir des échecs aux k premières tentatives ».