

# Lois de probabilités continues, cours, terminale, Mathématiques complémentaires

F.Gaudon

13 mai 2023

## Table des matières

<b>1 Généralités sur les lois de probabilités continues</b>	<b>2</b>
<b>2 Loi uniforme</b>	<b>3</b>
<b>3 Loi exponentielle</b>	<b>4</b>

# 1 Généralités sur les lois de probabilités continues

## Notation :

On considère un univers  $I$  de la forme  $[a; b]$  où  $a$  et  $b$  sont deux réels tels que  $a < b$  ou de la forme  $[a; +\infty[$  avec  $a$  réel. On notera :

- $\int_I f(t)dt = \int_a^b f(x)dt$  dans le premier cas ;
- $\int_I f(t)dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t)dt$  dans le deuxième cas.

## Définition :

Avec les notations précédentes :

- On appelle *densité de probabilité* sur  $I$ , toute fonction  $f$  continue et positive telle que

$$\int_I f(t)dt = 1$$

- On dit qu'une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $I$  suit une loi de probabilité de densité  $f$  sur  $I$  si pour tout intervalle  $J$  inclus dans  $I$  :

$$P(X \in J) = \int_J f(t)dt$$

Une telle variable aléatoire est dite continue sur  $I$ .

## Exemple :

Soit  $f$  définie par  $f(x) = 2x$  sur  $[0; 1]$ .

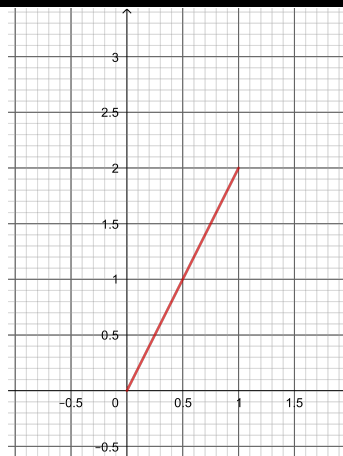
$f$  est continue et positive sur  $[0; 1]$ .

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 2t dt = [t^2]_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1.$$

$f$  est donc la densité de probabilité

d'une variable aléatoire  $X$  qui vérifie :

$$P(X \leq x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x 2t dt = [t^2]_0^x = x^2.$$



## Propriété :

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi de probabilité continue de densité  $f$  sur  $I$ .

- $P(X \in I) = 1$  ;
- Pour tout réel  $x$ ,  $P(X = x) = \int_x^x f(t)dt = 0$  ;
- $P(X \in [a; b]) = P(X \in ]a; b]) = P(X \in [a; b[) = P(X \in ]a; b[)$  et  $P(X \leq a) = P(X < a)$  pour tous les réels  $a$  et  $b$  avec  $a < b$ .

**Définition :**

On appelle *espérance mathématique* d'une variable aléatoire continue  $X$  de densité de probabilité  $f$  définie sur un intervalle  $J$  le réel noté  $E(X)$  défini par

$$E(X) = \int_J t f(t) dt$$

**Exemple :**

Pour la variable aléatoire  $X$  de l'exemple précédent, on a  $E(X) = \int_0^1 t \times 2t dt = \int_0^1 2t^2 dt = [2\frac{t^3}{3}]_0^1 = \frac{2}{3}$ .

## 2 Loi uniforme

**Propriété et définition :**

Soit  $[a; b]$  un intervalle avec  $a$  et  $b$  réels. On appelle *loi uniforme* sur  $[a; b]$ , la loi de probabilité dont la densité  $f$  est  $f(x) = \frac{1}{b-a}$  pour tout réel  $x \in [a; b]$ .

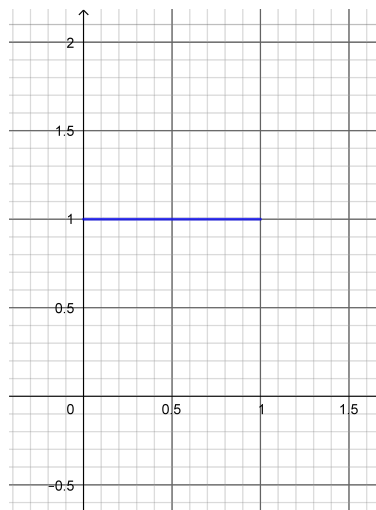
Si une variable aléatoire  $X$  suit une loi uniforme sur  $[a; b]$  on note  $X \sim \mathcal{U}([a; b])$ .

**Preuve :**

On a  $f \geq 0$  et on a  $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b 1 dt = [t]_a^b = b - a$ .

**Exemple :**

La fonction Alea() du tableur donne des valeurs suivants la loi uniforme sur  $[0; 1]$ .



**Propriété :**

Pour tous les réels  $c$  et  $d$  de  $[a; b]$  avec  $c \leq d$ ,

$$P(c \leq X \leq d) = \frac{d - c}{b - a}$$

**Exemple :**

On considère une variable aléatoire  $X$  qui suit la loi uniforme sur l'intervalle  $[20; 50]$ .

$$\text{Alors } P(20 \leq X \leq 25) = \int_{20}^{25} \frac{1}{50-20} dt = \int_{20}^{25} \frac{1}{30} dt = \left[ \frac{1}{30} t \right]_{20}^{25} = \frac{25-20}{50-20} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

**Propriété :**

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur  $[a; b]$ . Alors l'espérance  $E(X)$  de  $X$  est :

$$E(X) = \frac{a + b}{2}$$

**Preuve :**

$$E(X) = \int_a^b t f(t) dt = \int_a^b \frac{t}{b-a} dt = \left[ \frac{1}{b-a} \frac{t^2}{2} \right]_a^b$$

donc  $E(X) = \frac{1}{b-a} \left( \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) = \frac{1}{2(b-a)} (b-a)(b+a) = \frac{a+b}{2}$

### 3 Loi exponentielle

**Définition et propriété :**

Soit  $\lambda$  un réel strictement positif. On appelle *loi exponentielle* de paramètre  $\lambda$  la loi de probabilité dont la densité  $f$  est définie par :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

pour tout réel  $t \in [0; +\infty[$ .

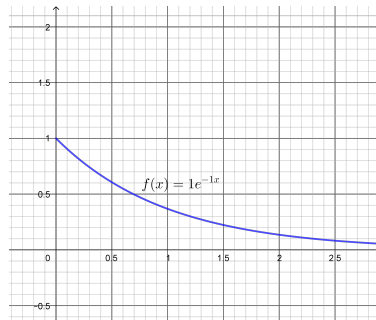
Si une variable aléatoire  $X$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  alors on note  $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ .

**Preuve :**On a  $f \geq 0$ .

$$\int_0^b f(t) dt = \int_0^b \lambda e^{-\lambda t} dt$$

$$= [-e^{-\lambda t}]_0^b = -e^{-\lambda b} - (-e^{-\lambda \cdot 0}) = 1 - e^{-\lambda b}$$

$$\text{Or } \lim_{b \rightarrow +\infty} 1 - e^{-\lambda b} = 1 \text{ d'où } \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1.$$

**Propriété :**

Si  $X$  est une loi de probabilité suivant une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , alors pour tout réel  $b$ ,

- $P(X \leq b) = P(X < b) = 1 - e^{-\lambda b}$  ;
- $P(X \geq b) = P(X > b) = e^{-\lambda b}$ .

**Preuve :**

$$P(X \leq b) = P(0 \leq X \leq b) = \int_0^b \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \left[ \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]_0^b = \frac{-\lambda}{\lambda} (e^{-\lambda b} - e^0) = 1 - e^{-\lambda b}$$

**Propriété :**

Si  $X$  est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , alors pour tous les réels positifs  $t$  et  $h$  :

$$P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$$

**Preuve :**

$$P_{X \geq t}(X \geq t + h) = \frac{P((X \geq t+h) \cap (X \geq t))}{P(X \geq t)} = \frac{P(X \geq t+h)}{P(X \geq t)} = \frac{1 - P(X < t+h)}{1 - P(X < t)}$$

$$\text{D'où } P_{X \geq t}(X \geq t + h) = \frac{1 - (1 - e^{-\lambda(t+h)})}{1 - (1 - e^{-\lambda t})} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t} e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h}$$

Or  $P(X \geq h) = 1 - P(X < h) = e^{-\lambda h}$  d'où l'égalité.

**Propriété :**

L'espérance d'une variable aléatoire  $X$  qui suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  est

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

**Preuve  $\odot$  :**

Soit  $g$  la fonction définie par  $g(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$  pour tout  $t \geq 0$ .

On cherche une primitive  $G$  de  $g$  de la forme  $G(t) = (at + b)e^{-\lambda t}$ .

On a  $G'(t) = ae^{-\lambda t} - (at + b)\lambda e^{-\lambda t} = (a - \lambda b - at)e^{-\lambda t}$ .

$G'(t) = g(t)$  pour  $a - \lambda b = 0$  et  $-a = \lambda$

c'est à dire  $a = -\lambda$  et  $b = \frac{-1}{\lambda}$

d'où  $G(t) = (-t - \frac{1}{\lambda})e^{-\lambda t}$ .

On a donc  $\int_0^b g(t)dt = G(b) - G(0)$ .

Or  $G(0) = -\frac{1}{\lambda}$  et  $G(b) = -be^{-\lambda b} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda b}$ .

Comme  $\lim_{b \rightarrow +\infty} be^{-\lambda b} = 0$  et  $\lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-\lambda b} = 0$  on a donc  $\lim_{b \rightarrow +\infty} G(b) - G(0) = \frac{1}{\lambda}$