Lois de probabilités continues, cours, terminale, Mathématiques complémentaires

1 Généralités sur les lois de probabilités continues

Notation :

On considère un univers I de la forme $[a;b]$ où a et b sont deux réels tels que $a < b$ ou de la forme $[a;+\infty[$ avec a réel. On notera :
- $\int_I f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$ dans le premier cas ;
- $\int_I f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt$ dans le deuxième cas.

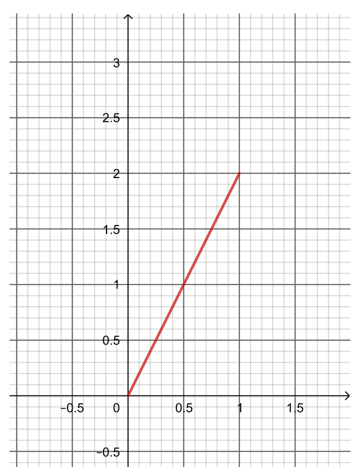
Définition :

Avec les notations précédentes :
- On appelle *densité de probabilité* sur I, toute fonction f continue et .... telle que
$$\int_I f(t)dt = ...$$
- On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans I suit une loi de probabilité de densité f sur I si pour tout intervalle J inclus dans I :
$$P(X \in J) = ...$$

Une telle variable aléatoire est dite .... sur I.

Exemple :

Soit f définie par $f(x) = 2x$ sur $[0;1]$.
f est continue et positive sur $[0;1]$.
$\int_0^1 f(t)dt =$...... .
.....
f est donc la densité de probabilité d'une variable aléatoire X qui vérifie :
$P(X \leq x) =$.....
....



Propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de probabilité continue de densité f sur I.

- $P(X \in I) = ...$;
- Pour tout réel x, $P(X = x) = \int_x^x f(t)dt = ...$;
- $P(X \in [a;b]) = P(X \in ..a;b..) = P(X \in ..a;b..) = P(X \in ..a;b..)$ et $P(X \leq a) = P(X...a)$ pour tous les réels a et b avec $a < b$.

Définition :

On appelle *espérance mathématique* d'une variable aléatoire X continue sur un intervalle I de densité de probabilité f, le nombre

...

Exemple :

Pour la variable aléatoire X de l'exemple précédent, on a
$E(X) = ...$
...

2 Loi uniforme

Propriété et définition :

Soit $[a;b]$ un intervalle avec a et b réels. On appelle *loi uniforme* sur $[a;b]$, la loi de probabilité dont la densité f est définie par :

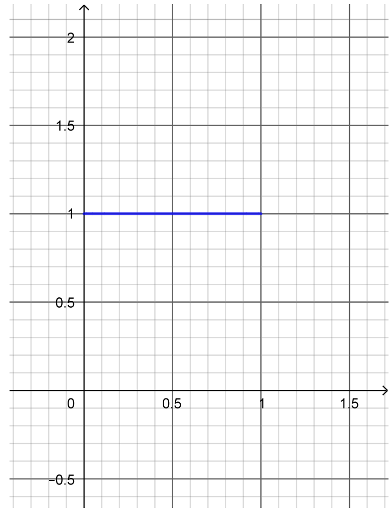
....

pour tout réel $x \in [a;b]$
Si une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur un intervalle $[a;b]$ on note $X \sim \mathcal{U}([a;b])$.

Preuve :

On a $f \geq .....$
$\int_a^b f(t)dt = ...$

Exemple :
La fonction `Alea()` du tableur donne des valeurs suivants la loi uniforme sur $[0;1]$.



Propriété :

Pour tous les réels c et d de $[a;b]$ avec $c \leq d$,

$$P(c \leq X \leq d) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a;b]$. Alors l'espérance $E(X)$ de X est :

$$\ldots\ldots\ldots$$

Preuve :
$E(X) = \int_a^b \frac{t}{b-a} dt = \ldots$

3 Loi exponentielle

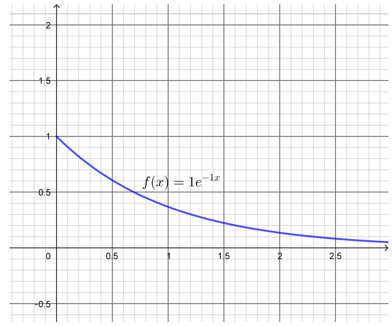
Définition et propriété :

Soit λ un réel strictement positif. On appelle *loi exponentielle* de paramètre λ la loi de probabilité dont la densité f est définie par :

$$f(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

pour tout réel $t \in [0;+\infty[$.
Si une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ alors on note $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

Preuve :
On a $f \geq 0$.
$\int_0^b f(t)dt = \int_0^b \lambda e^{-\lambda t} dt$
$= [-e^{-\lambda t}]_0^b = -e^{-\lambda b} - (-e^{-\lambda 0}) = 1 - e^{-\lambda b}$
Or $\lim_{b \to +\infty} 1 - e^{-\lambda b} = 1$ d'où $\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1$.



Propriété :

Si X est une loi de probabilité suivant une loi exponentielle de paramètre λ, alors pour tout réel b,

$$P(X \leq ....) = ...$$

et

$$P(X \geq ...) = ...$$

Preuve :
$P(X \leq b) = ...$
....

Exemple :
Soit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.
$P(X \geq 5) = ...$

Propriété :

Si X est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ, alors pour tous les réels positifs t et h :

$$P_{X \geq t}(X \geq t + h) = ...$$

On dit qu'une loi exponentielle est « sans mémoire ».

Preuve :
$P_{X \geq t}(X \geq t + h) = ...$
...
...

Propriété :

L'espérance d'une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ est ....

Preuve ⊙ :

Soit g la fonction définie par $g(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$ pour tout $t \geq 0$.
On a $E(x) = \int_0^{\infty} g(t)dt$.
On cherche une primitive G de g de la forme $G(t) = (at+b)e^{-\lambda t}$ avec a et b réels à déterminer.
On a $G'(t) =$ ....
...
..

$G'(t) = g(t)$
pour ....

D'où G définie par $G(t) =$ .... est une primitive de g.
On a donc $E(X) = \int_0^b g(t)dt = G(b) - G(0)$.
Or $G(0) =$ ....
et $G(b) =$ ....
D'où ...